

CLAVE-107-6-M-2-00-2015

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

**FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**



CURSO:	Matemática Intermedia 1
TIPO DE EXAMEN:	Examen Final
AUXILIAR:	Julio Isaí Santos Mayorga
FECHA:	28 de noviembre de 2014
SEMESTRE:	Segundo
HORARIO DE EXAMEN:	8 a.m. – 10 a.m.
REVISÓ:	Ing. César Ariel Villela Rodas

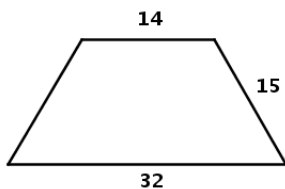
Tema No. 1 (10 puntos): Resolver el siguiente sistema utilizando $X = A^{-1} \cdot b$.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y - z &= 2 \\ 3x + 2y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

Tema No.2 (10 puntos): Encontrar los valores de "z" de la siguiente matriz utilizando cofactores, de tal manera que el determinante sea -1.

$$\begin{bmatrix} z-2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z+1 \end{bmatrix}$$

Tema No.3 (10 puntos): Plantear una integral para la fuerza hidrostática que se ejerce sobre la compuerta de una presa que tiene la forma de un trapecio cuya base superior se encuentra a 30 m de profundidad.



Tema No.4 (15 puntos): Dadas las siguientes funciones paramétricas.

$$x(t) = 1 - \cos^2 t \quad \& \quad y(t) = \sin t$$

- Plantear una integral para calcular la longitud de arco en el intervalo $\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$
- Plantear una integral para calcular el área superficial al hacer rotar alrededor del eje "y", en el intervalo de $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$.
- Convertir a función cartesiana.

Tema No.5 (10 puntos): Resolver la siguiente integral utilizando Maclaurin con n=4.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx$$

Tema No.6 (10 puntos): Demostrar que $A^{-1} * A = I$, utilizando la siguiente matriz. Utilizar cofactores.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Tema No.7 (10 puntos): Graficar e identifique en R^3 :

$$\text{a. } r(\theta) = 2 \sec \theta \quad \text{b. } \cos \varphi = \rho \cos^2 \theta \sin^2 \varphi$$

Tema No.8 (15 puntos): Evalúe las siguientes integrales (5 puntos cada una)

$$\text{a. } \int \frac{1}{\cos x - 1} dx \quad \text{b. } \int \frac{\sqrt{x}}{x^2 + x} dx \quad \text{c. } \int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2 (x^2 + 1)} dx$$

Tema No.9 (10 puntos): Determinar los siguiente:

- El punto de intersección de la recta $x=1+t$, $y=1-t$, $z=1-3t$ y el plano $x+y+z=0$
- El plano que se forma con el punto (1, 2, 3) y la línea de intersección de los planos: $2x - y + 3z = 1$ & $x + y - 2z = 2$.

TEMA NO. 1

Comprobando si el sistema tiene solución única (por medio del determinante).

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1[(-1)(-2) - (2)(-1)] - 1[(2)(-2) - (3)(-1)] + 1[(2)(2) - (3)(-1)]$$

$$|A| = 12 \rightarrow \text{Solución única}$$

Encontrando A^{-1}

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}F_2 \rightarrow F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2 \rightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -7/3 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}F_3 \rightarrow F_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/12 & 1/12 & -1/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 - F_3 \rightarrow F_1 \\ F_2 - F_3 \rightarrow F_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 5/12 & -1/12 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/12 & -5/12 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 7/12 & 1/12 & -1/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2 \rightarrow F_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/12 & -5/12 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 7/12 & 1/12 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa de la matriz A es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/12 & -5/12 & 1/4 \\ 7/12 & 1/12 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Utilizando el método especificado para encontrar el valor de las incógnitas:

$$X = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/12 & -5/12 & 1/4 \\ 7/12 & 1/12 & -1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)(3) + \left(\frac{1}{3}\right)(2) + (0)(2) \\ \left(\frac{1}{12}\right)(3) - \left(\frac{5}{12}\right)(2) + \left(\frac{1}{4}\right)(2) \\ \left(\frac{7}{12}\right)(3) + \left(\frac{1}{12}\right)(2) - \left(\frac{1}{4}\right)(2) \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ -1/12 \\ 17/12 \end{bmatrix}$$

TEMA NO. 2

Utilizando la segunda columna de la matriz:

$$|A| = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} = -1$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} z-2 & 1 \\ 1 & z+1 \end{vmatrix} = 1[(z-2)(z+1) - (1)(1)]$$

$$C_{22} = z^2 + z - 2z - 2 - 1 = z^2 - z - 3$$

Sustituyendo el cofactor C_{22} en la ecuación del determinante:

$$|A| = a_{22}C_{22} = (1)(z^2 - z - 3) = -1$$

$$z^2 - z - 2 = 0$$

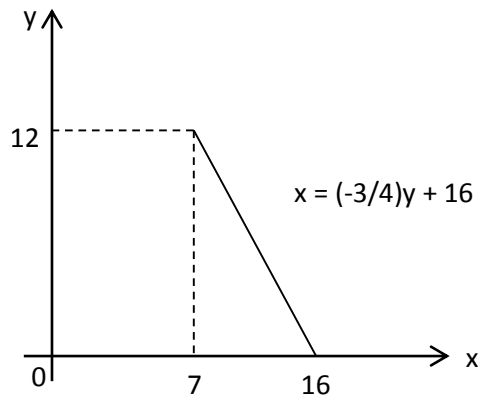
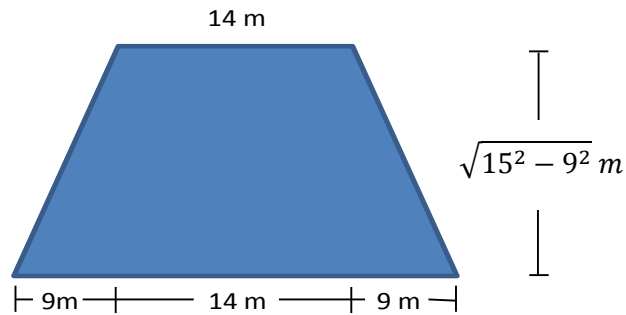
$$(z+1)(z-2) = 0$$

Por lo tanto, los valores de “z” son:

$$z = -1$$

$$z = 2$$

TEMA NO. 3



La integral que representa la fuerza hidrostática aplicada queda de la siguiente forma:

$$F = \rho g \int (\text{profundidad})(\text{área})$$

$$F = (2) \left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \int_0^{12} (42 - y) \left(-\frac{3}{4}y + 16 \right) dy$$

NOTA: la integral anterior se multiplicó por 2 debido a que la figura es simétrica, si no se hace esto, se tomaría en cuenta solo la mitad de la compuerta.

TEMA NO. 4

a)

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Encontrando las derivadas requeridas:

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cos(t) \operatorname{sen}(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t)$$

Sustituyendo:

$$L = \int_{\pi/2}^{2\pi} \sqrt{(2 \cos(t) \operatorname{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2} dt$$

b)

$$A_s = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Utilizando las derivadas encontradas en el inciso anterior:

$$A_s = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} (1 - \cos^2(t)) \sqrt{[2 \cos(t) \operatorname{sen}(t)]^2 + [\cos(t)]^2} dt$$

c) Utilizando identidades trigonométricas:

$$x = 1 - \cos^2(t) = \operatorname{sen}^2(t)$$

$$y = \operatorname{sen}(t)$$

$$x = y^2$$

$$y = \pm\sqrt{x}$$

TEMA NO. 5

Encontrando el polinomio:

$$\begin{aligned}f(x) &= \text{sen}(x) \\f'(x) &= \cos(x) \\f''(x) &= -\text{sen}(x) \\f'''(x) &= -\cos(x) \\f^{iv}(x) &= \text{sen}(x) \\f^v(x) &= \cos(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(0) &= \text{sen}(0) = 0 \\f'(0) &= \cos(0) = 1 \\f''(0) &= -\text{sen}(0) = 0 \\f'''(0) &= -\cos(0) = -1 \\f^{iv}(0) &= \text{sen}(0) = 0 \\f^v(0) &= \cos(0) = 1\end{aligned}$$

$$P_5(x) = 0 + \frac{(1)x}{1!} + \frac{(0)x^2}{2!} + \frac{(-1)x^3}{3!} + \frac{(0)x^4}{4!} + \frac{(1)x^5}{5!}$$

$$P_5(x) = \frac{(1)x}{1!} + \frac{(-1)x^3}{3!} + \frac{(1)x^5}{5!}$$

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Para n=4:

$$\text{sen}(x) \approx \sum_{n=0}^4 (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

$$\int \text{sen}(x) dx \approx \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + C$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \text{sen}(x) dx \approx \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^8}{8!} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10}}{10!} - \left[\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6}{6!} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^8}{8!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{10}}{10!} \right]$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \text{sen}(x) dx \approx \mathbf{0.7071}$$

TEMA NO. 6

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Encontrando matriz de cofactores:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

$$C = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Encontrando la matriz adjunta:

$$AdjA = C^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

El determinante de A está dado por:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Por lo tanto, la matriz inversa de A está dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Comprobando lo que se solicita:

$$AA^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} (ad - bc) & (-ab + ba) \\ (cd - dc) & (-cb + da) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(ad-bc)}{ad-cb} & 0 \\ 0 & \frac{(-cb+da)}{ad-cb} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

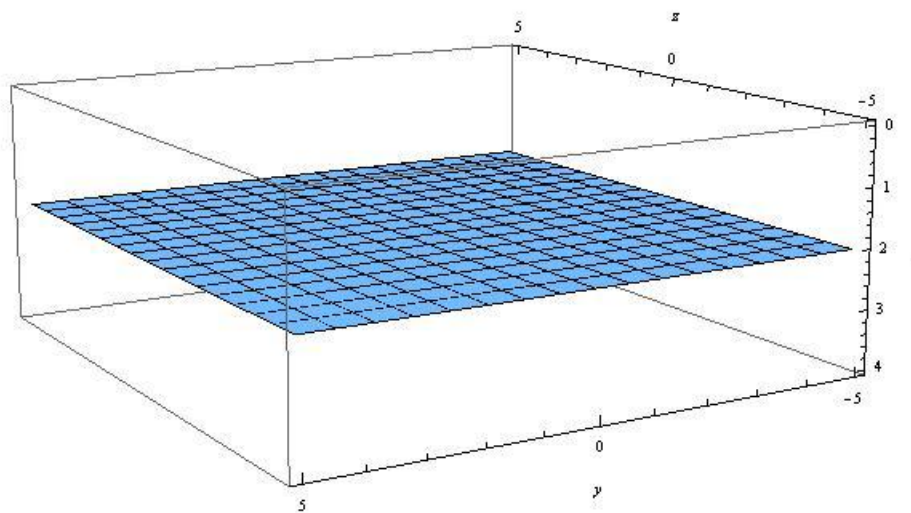
$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

TEMA NO. 7

a)

$$r(\theta) = 2\sec\theta = 2 * \frac{1}{\cos\theta}$$

Dado que $r\cos\theta = 2$, y $r\cos\theta = x$, entonces $x = 2$. La gráfica de esta función es un plano en que atraviesa el eje x en 2, paralelo al plano yz. La gráfica queda de la siguiente manera:



b)

$$\cos\varphi = \rho \cos^2\theta \sin^2\varphi$$

Multiplicando por ρ de ambos lados de la ecuación anterior.

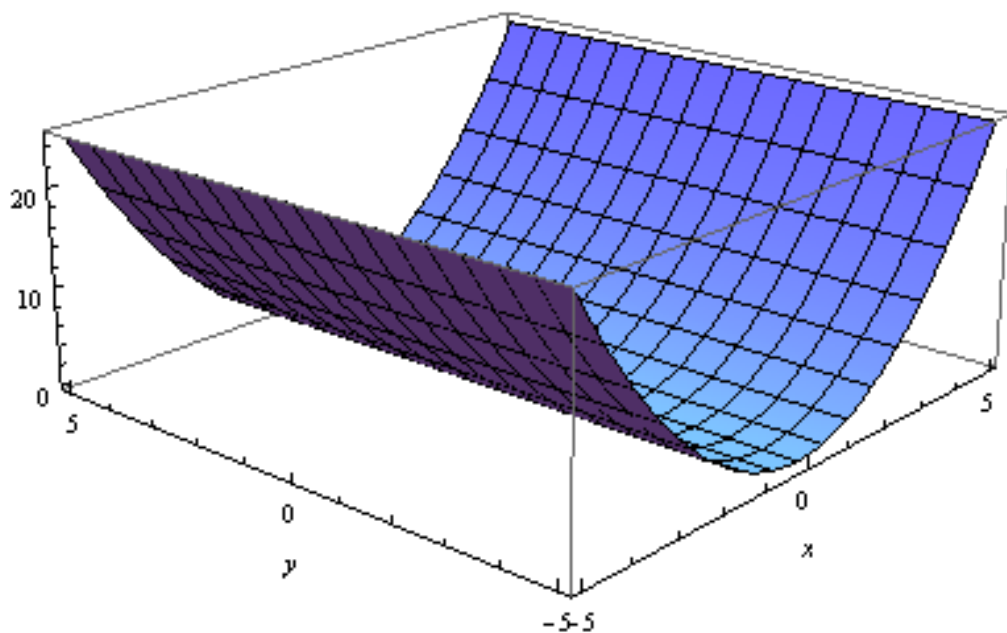
$$\rho \cos\varphi = \rho^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi$$

$$\rho \cos\varphi = (\rho \cos\theta \sin\varphi)^2$$

Dado que $\rho \cos\varphi = z$, asimismo $\rho \cos\theta \sin\varphi = x$, entonces tenemos la siguiente ecuación cartesiana:

$$z = x^2$$

La gráfica queda de la siguiente manera:



TEMA NO. 8

a)

$$\int \frac{1}{\cos x - 1} dx = \csc x + \cot x + C$$

PROCEDIMIENTO:

Multiplicando por el conjugado:

$$\int \frac{1}{\cos x - 1} * \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} dx = \int \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x - 1} dx$$

Utilizando la identidad: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\int \frac{\cos x + 1}{-\sin^2 x} dx = \int \left[\frac{\cos x}{-\sin(x) \sin(x)} + \frac{1}{-\sin^2 x} \right] dx = \csc x + \cot x + C$$

b)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x^2 + x} dx = 2 \tan^{-1} \sqrt{x} + C$$

PROCEDIMIENTO:

Haciendo la siguiente sustitución:

$$\begin{aligned} x &= u^2 \\ dx &= 2u du \\ \int \frac{\sqrt{x}}{x^2 + x} dx &= \int \frac{2u^2}{u^4 + u^2} du = \int \frac{2u^2}{u^2(u^2 + 1)} du \\ &= \int \frac{1}{u^2 + 1} du = 2 \tan^{-1}(u) + C \end{aligned}$$

Regresando a la variable original:

$$\begin{aligned} x &= u^2 \\ u &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$2 \tan^{-1}(u) + C = 2 \tan^{-1} \sqrt{x} + C$$

c)

$$\int \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} dx$$

Utilizando el método de fracciones parciales:

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{x - 1}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx \\ &= \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + \tan^{-1}(x) + \frac{1}{x - 1} + C \end{aligned}$$

TEMA NO. 9

a) Dadas las ecuaciones de la recta:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 - t \\ z &= 1 - 3t \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ (1 + t) + (1 - t) + (1 - 3t) &= 0 \\ -3t + 3 &= 0 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Encontrando el punto de intersección:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 1 = 2 \\ y &= 1 - 1 = 0 \\ z &= 1 - 3(1) = -2 \end{aligned}$$

Por lo tanto el punto de intersección es **P(2, 0, -2)**.

b) Encontrando las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right] F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] (-1) * F_2 \rightarrow F_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} y - z = -1 \\ y = t - 1 \end{array} ; \quad z = t$$

$$\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x = -y - z = 1 - t - t \\ x = 1 - 2t \end{array}$$

Por lo tanto la recta está dada por:

$$\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{array}$$

Se necesitan dos puntos (aparte del que dan en el enunciado), por lo tanto se valuarán las ecuaciones paramétricas anteriores en $t = 1$ y $t = 2$.

$$\begin{array}{l} P_1(1, 2, 3) \rightarrow \text{el que da el enunciado} \\ P_2(-1, 0, 1) \rightarrow \text{con } t = 1 \\ P_3(-3, 1, 2) \rightarrow \text{con } t = 2 \end{array}$$

Tomando como vértice (del triángulo formado por los 3 puntos) el punto dado en el enunciado del problema, se tienen los siguientes dos vectores:

$$\begin{array}{l} \vec{A} = \langle -1 - 1, 0 - 2, 1 - 3 \rangle = \langle -2, -2, -2 \rangle \\ \vec{B} = \langle -3 - 1, 1 - 2, 2 - 3 \rangle = \langle -4, -1, -1 \rangle \end{array}$$

El vector normal al plano está dado por:

$$\vec{N} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0\hat{i} + 6\hat{j} + 10\hat{k}$$

Encontrando la ecuación del plano:

$$\begin{array}{l} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ 0(x - 1) + 6(y - 2) + 10(z - 3) = 0 \\ 6y - 12 + 10z - 30 = 0 \\ \mathbf{6y + 10z = 42} \end{array}$$