UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-103-2-V-1-00-2018

CURSO:	**Matemática Intermedia 1**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**103**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo Examen Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**13 de marzo de 2018**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Kevin Adolfo Duarte Chamalé**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Kevin Adolfo Duarte Chamalé**
REVISÓ EL EXAMEN:	
COORDINADOR:	**Inga. Vera Marroquín**

TEMA 1 **(35 PUNTOS)**

1.1 Encontrar el centroide de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 2x + 1$, y la recta $4x + y = 2$.

1.2 Una placa plana, en forma de cuarto de círculo de 4 m de radio, se sumerge verticalmente en aceite, de densidad 800 kg/m^3 colocada a 1 m de profundidad desde la superficie de aceite a la parte superior de la placa. Plantee una integral para la fuerza total ejercida por la presión del aceite en la cara de la placa.

TEMA 2 **(30 PUNTOS)**

2.1 Determine si la integral es convergente $\int_1^e \frac{1}{x\, lnx}\, dx$

2.2 Sin encontrar los valores de las constantes, resuelva la integral

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{(x+1)^2(x-4)(x^2+3x+9)}}$$

2.3 Use la regla de Simpson para obtener una aproximación a la integral $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx,$ n = 4

TEMA 3 **(35 PUNTOS)**

3.1 Determine si la sucesión es convergente $\left\{\frac{3-4n}{1+2n}\right\}$

3.2 Aplique criterio de la integral para determinar si la serie converge o diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^4+1}$$

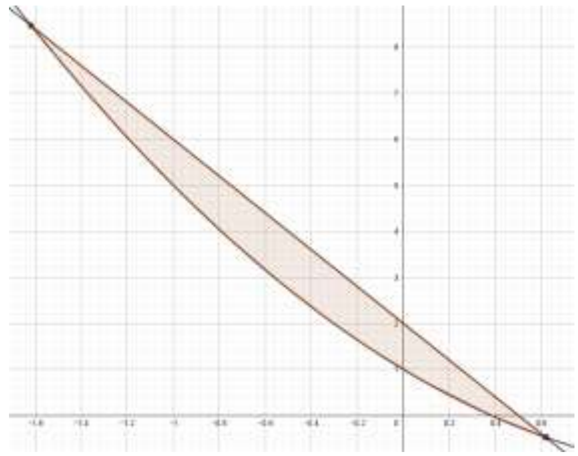
3.3 Dada las series, determine, si convergen o divergen identificando el criterio usado. Si es posible encuentre la suma

$$a.\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2^n}\right) \qquad b.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}} \qquad c.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-4n}{1+2n}$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1

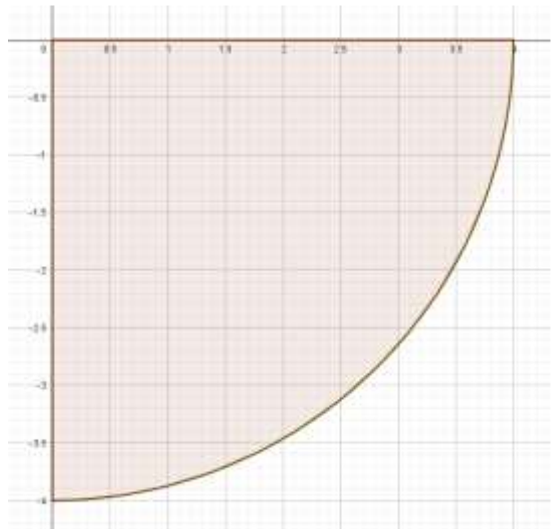
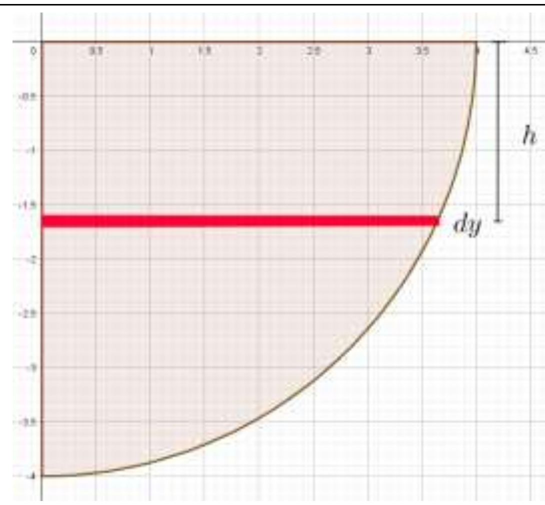
1.1 Encontrar el centroide de la región limitada por las curvas $y = x^2 - 2x + 1$, y la recta $4x + y = 2$.

No.	Explicación	Operatoria
1	Graficamos las funciones y de su intersección, obtenemos la siguiente figura.	
2	Hallamos los puntos en donde se intersectan las funciones, igualándolas.	$x^2 - 2x + 1 = -4x + 2$ $x^2 + 2x - 1 = 0$ $x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = -1 \pm \sqrt{2}$ $P_1(-2.4142, 11.65)$ $P_2(0.4142, 11.65)$
3	Procedemos a calcular el área, un parámetro necesario para el cálculo del centroide.	$A = \int_{-2.4142}^{0.4142} [(-4x + 2) - (x^2 - 2x + 1)]dx$ $A = \int_{-2.4142}^{0.4142} (1 - 2x - x^2)dx$ $A = 3.771\ u^2$
4	Procedemos a calcular el valor del centroide en el eje horizontal (x).	$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_{-2.4142}^{0.4142} x\ dA$ $\bar{x} = \frac{1}{A}\int_{-2.4142}^{0.4142} x\ (1 - 2x - x^2)\ dx$

5		$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_{-2.4142}^{0.4142} (x - 2x^2 - x^3)\, dx$ $\bar{x} = \frac{1}{A}\left[-\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-2.4142}^{0.4142}$ $\bar{x} = \frac{-3.771}{3.771} = -1$
6	Procedemos a calcular el valor del centroide en el eje vertical (y).	$\bar{y} = \frac{1}{A}\int \frac{[f^2(x) - g^2(x)]}{2}\, dx$ $\bar{y} = \frac{1}{2A}\int [(-4x+2)^2 - (x^2 - 2x + 1)^2]\, dx$ $\bar{y} = \frac{1}{2A}\int (3 - 12x + 10x^2 + 4x^3 - x^4)\, dx$ $\bar{y} = \frac{1}{2A}\left[3x - 12\frac{x^2}{2} + 10\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2.4142}^{0.4142}$ $\bar{y} = \frac{39.221}{2(3.771)} = 5.20$

R// $C(-1, 5.20)$

1.2 Una placa plana, en forma de cuarto de círculo de 4 m de radio, se sumerge verticalmente en aceite, de densidad 800 kg/m^3 colocada a 1 m de profundidad desde la superficie de aceite a la parte superior de la placa. Plantee una integral para la fuerza total ejercida por la presión del aceite en la cara de la placa.

No.	Explicación	Operatoria
1	Tenemos la siguiente función, para el cuarto de círculo.	$x = \sqrt{4^2 - y^2} \quad , \quad -4 \leq y \leq 0$
2	La gráfica de la función anterior es la siguiente.	
3	Plantemos ahora el diferencial de fuerza.	
4	Conocemos lo siguiente.	$dF = P\, dA$ $P = \rho g h$ $h = -y$ $dA = x\, dy = \sqrt{4^2 - y^2}$

5	El diferencial de fuerza, queda entonces de la siguiente forma.	$dF = (\rho g)(-y)\sqrt{4^2 - y^2}\, dy$ $F = -\rho g y\sqrt{4^2 - y^2}\, dy$
6	Sabemos que los límites de nuestra integral están en el eje vertical, y van desde el centro del círculo hasta su radio (en este caso negativo por la orientación del dibujo.	$y_o = -4$ $y_1 = 0$
7	Finalmente, para encontrar la presión tenemos que integrar, el diferencial hallado en el punto 4, dentro de los límites hallados en el punto anterior. El resultado es el siguiente.	$F = -(800)(9.8)\int_{-4}^{0} y\sqrt{16 - y^2}\, dy$ $F = -7840\int_{-4}^{0} y\sqrt{16 - y^2}\, dy$

R// $\boxed{F = -7840\int_{-4}^{0} y\sqrt{16 - y^2}\, dy}$

Tema 2

2.1 Determinar si la integral es convergente.

$$\int_{1}^{e} \frac{1}{x\, lnx}\, dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Para resolver esta integral debemos efectuar una sustitución. Sin embargo antes se deben modificar los limites, pues tenemos que la integral tiene un punto no definido como límite de integración.	$I = \lim_{t \to 1} \int_{t}^{e} \frac{1}{x \ln x}\, dx$
2	Procedemos a resolver la integral.	$\int \frac{1}{x \ln x}\, dx$ $u = \ln x$ $du = \frac{1}{x}$ $\int u\, du = \ln u$ $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \ln \ln x + C$
3	Evaluamos los límites.	$I = \ln \ln e - \lim_{t \to 1} (\ln \ln t)$ $I = 0 - (-\infty) = \infty$

R// Ya que la integral da un resultado infinito, al evaluar los limites, concluimos que la integral no converge.

2.2 Sin encontrar los valores de las constantes, resolver la integral.

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{(x+1)^2(x-4)(x^2+3x+9)}}$$

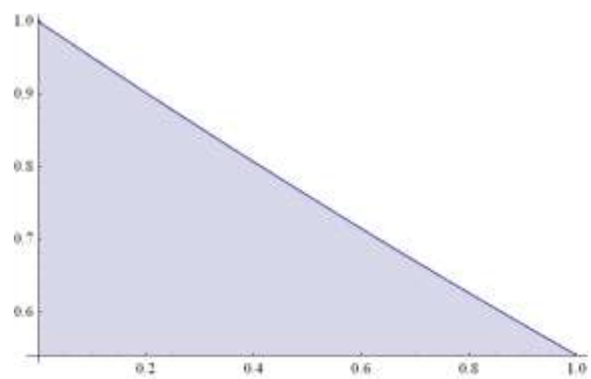
No.	Explicación	Operatoria
1	Separamos la función para poder aplicar fracciones parciales.	$\frac{1}{(x+1)^2(x-4)(x^2+3x+9)}$ $= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-4} + \frac{Dx+E}{(x^2+3x+9)}$
2	Como no es necesario hallar las constantes, procedemos a resolver la integral.	$\int \left[\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-4} + \frac{Dx+E}{(x^2+3x+9)}\right] dx$ $A\ln(x+1) + \frac{-B}{(x+1)} + C\ln(x-4)$ $+ \int \left[\frac{Dx+E}{(x^2+3x+9)}\right] dx$
3	Procedemos a resolver la integral restante.	$\int \left[\frac{Dx+E}{(x^2+3x+9)}\right] dx$ $\int \frac{\frac{D}{2}(2x+3)}{x^2+3x+9} dx + \int \frac{\left(E+\frac{3D}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4}} dx$ $u = x^2+3x+9$ $du = 2x+3$ $v = \left(x+\frac{3}{2}\right)$ $dv = dx$ $\frac{D}{2}\int \frac{1}{u} du + \left(E+\frac{3D}{2}\right)\int \frac{1}{v^2+\frac{27}{4}} dv$ $\frac{D}{2}\ln u + \left(E+\frac{3D}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{27}} tan^{-1}\left(\frac{2v}{\sqrt{27}}\right)$

		$\frac{D}{2}\ln(x^2+3x+9)+\left(E+\frac{3D}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{27}}tan^{-1}\left(\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{27}}\right)$
4	Sumamos todos los términos.	$A\ln(x+1)+\frac{-B}{(x+1)}+C\ln(x-4)$ $+\frac{D}{2}\ln(x^2+3x+9)$ $+\left(E+\frac{3D}{2}\right)\frac{2\sqrt{27}}{27}tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{27}\left(x+\frac{3}{2}\right)}{27}\right)$

R// $$A\ln(x+1)+\frac{-B}{(x+1)}+C\ln(x-4)+\frac{D}{2}\ln(x^2+3x+9)+\left(E+\frac{3D}{2}\right)\frac{2\sqrt{27}}{27}tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{27}\left(x+\frac{3}{2}\right)}{27}\right)$$

2.3 Use la regla de Simpson para obtener una aproximación a la integral para n = 4

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Deseamos aproximar la siguiente área.	
2	Hallamos los parámetros necesarios para la regla de Simpson.	$\Delta x = \frac{1-0}{4} = 0.25$
3	Evaluamos los datos en ecuación para la regla de Simpson.	$\int_0^1 Cos(\sqrt{x})dx = \frac{0.25}{3}[Cos(\sqrt{0}) + Cos(\sqrt{0.25}) + Cos(\sqrt{0.5}) + Cos(\sqrt{0.75}) + Cos(\sqrt{1})]$ $\int_0^1 Cos(\sqrt{x})dx = 0.99992$

R// $\int_0^1 Cos(\sqrt{x})dx = 0.99992$

Tema 3

3.1 Determinar si la sucesión es convergente.

$$\left\{\frac{3-4n}{1+2n}\right\}$$

No.	Explicación	Operatoria
1	La sucesión es convergente si el evaluar el límite al infinita, esta da un valor finito.	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-4n}{1+2n}$
2	Evaluando el límite obtenemos.	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}-4}{\frac{1}{n}+2} = \frac{0-4}{0+2} = -2$

R// Ya que el límite cuando n tiende a infinito de la sucesión, da como resultado un valor finito, concluimos que la sucesión converge.

3.2 Aplique el criterio de la integral para determinar si la serie converge o diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^4+1}$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Aplicamos el criterio de la integral.	$\int_1^{\infty} \frac{2n}{n^4+1} dn$
2	Resolvemos la integral, por medio de la sustitución.	$u = x^2$ $du = 2x\, dx$ $\lim_{x\to 1} u = 1$ $\lim_{x\to \infty} u = \infty$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{u^2+1} du = tan^{-1}(u)\|_1^{\infty}$ $\int_1^{\infty} \frac{2n}{n^4+1} dn = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

R// Ya que la integral da como resultado un valor finito, concluimos que la serie converge.

3.3 Dada las series, determine, si convergen o divergen identificando el criterio usado. Si es posible encuentre la suma.

$$a.\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\frac{1}{2^{n}}\right)$$

No.	Explicación	Operatoria
1	En este caso podemos escribir la serie de la siguiente forma.	$\frac{7}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$
2	Sabemos que ambas series convergen pues tiene la forma de la conocida serie geométrica, la cual converge si $\|r\|<1$ y cuyo resultado está indicado. Y como ambas series tienen un valor menor a uno, ambas convergen.	$\sum_{n=1}^{\infty}a\,r^{n}=\frac{a}{1-r}$
3	Se resuelve la serie.	$\frac{7}{5}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right)+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)$ $\frac{7}{5}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)+\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)$ $\frac{7}{5}(4)+(2)$ $\frac{7}{5}(4)+(2)$ $\frac{38}{5}$

$$\boxed{\textbf{R//}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\frac{1}{2^{n}}\right)=\frac{38}{5}}$$

$$b.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$$

No.	Explicación	Operatoria
1	En este caso podemos escribir la serie de la siguiente forma.	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{5/3}$
2	Vemos que la serie tiene la forma de la conocida, serie P, la cual converge en el caso de que *p* sea mayor a 1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$

R// La serie converge.

$$c.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-4n}{1+2n}$$

No.	Explicación	Operatoria
1	Hallamos el límite de la sucesión de la serie.	$\lim_{n\to\infty} \frac{3-4n}{1+2n}$
2	En este caso tenemos que, si el límite tiende a cero, la serie es convergente. En caso contrario, la serie diverge.	$\lim_{n\to\infty} \frac{3-4n}{1+2n} = -2$

R// La serie diverge, pues el límite de la sucesión de la serie no tiende a cero.