UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-107-3-V-2-00-2016

CURSO:	**Matemática Intermedia 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**107**
TIPO DE EXAMEN:	**Segunda Retrasada**
FECHA DE EXAMEN:	**Enero del 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Melvin Saúl Calel Otzoy**
REVISÓ EL EXAMEN	**Inga. Vera Marroquín**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Melvin Saúl Calel Otzoy**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

Segunda Retrasada Matemática Intermedia 1
Jornada Vespertina

Tema No. 1 (30 puntos)

a) Halle una representación en serie de potencias para la función $\ln(1+x)$.

b) Encuentre la $\sqrt{101}$ alrededor de 100, utilizando un polinomio de Taylor de 3er grado.

c) Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$ es convergente o divergente. En caso de que converja encuentre la suma.

Tema No. 2 (30 puntos)

a) Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto P(6, 0, -2) y contiene a la recta con ecuaciones:

$$x = 4 - 2t \text{ , } y = 3 + 5t \text{ , } z = 7 + 4t$$

b) Dada la ecuación $x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 13$, redúzcala a su forma standard, identifique la superficie dando su nombre y luego haga un bosquejo de la misma.

c) Escriba una ecuación en coordenadas esféricas para la superficie cuya ecuación rectangular es:

$x^2 + y^2 - z^2 = 0$, luego haga un bosquejo de la superficie.

Tema No. 3 (20 puntos)

Plantee la integral que calcule el área común a las curvas $r = a$, $r = 2asen\theta$ & $r = 2a\cos\theta$. Haga un bosquejo de las curvas en el mismo plano.

Tema No. 4 (20 puntos)

Una compuerta tiene forma de triángulo isósceles de 5 pies de altura y 8 pies de ancho (con su vértice hacia abajo). Plantee la integral que calcula la fuerza total del agua sobre la compuerta, si su parte superior está 10 pies debajo de la superficie del agua.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema No. 1: 30 puntos

a) Halle una representación en serie de potencias para la función $\ln(1+x)$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se elige la serie de Maclaurin para hallar la representación de serie de potencias. Se encuentran las derivadas de la función para evaluarlas en 0 y sustituir los datos en la fórmula para la Serie de Maclaurin: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$	$f(x)=\ln(1+x)$ $f(0)=0$ $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ $f'(0)=1$ $f''(x)=(-1)\frac{1}{(1+x)^2}$ $f''(0)=-1$ $f'''(x)=(-1)(-2)\frac{1}{(1+x)^3}$ $f'''(0)=1*2$ $f^4(x)=(-1)(-2)(-3)\frac{1}{(1+x)^4}$ $f^4(0)=-1*2*3$ $f^5(x)=(-1)(-2)(-3)(-4)\frac{1}{(1+x)^5}$ $f^5(0)=1*2*3*4$

2.	Se plantea la serie de potencias con las derivadas calculadas y evaluadas.	$f(x) = 0 + \frac{1*x}{1!} - \frac{1*x^2}{2!} + \frac{1*2*x^3}{3!} - \frac{1*2*3*x^4}{4!} + \frac{1*2*3*4*x^5}{5!}$ $Respuesta:$ $f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(n-1)!\frac{x^n}{n!}$

b) Encuentre la $\sqrt{101}$ alrededor de 100 utilizando un polinomio de Taylor de grado 3.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se encuentran las derivadas de la función para evaluarlas en 100 y sustituir los datos en la fórmula para la Serie de Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$	$f(x) = x^{1/2}$ $f(100) = 10$ $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ $f'(100) = \frac{1}{20}$ $f''(x) = -\frac{1}{2*2}x^{-3/2}$ $f''(0) = -\frac{1}{4000}$ $f'''(x) = \frac{1*3}{2*2*2}x^{-5/2}$ $f'''(100) = \frac{3}{800000}$

2.	Se plantea el polinomio de Taylor con las derivadas encontradas y evaluadas.	$T_3(x) = 10 + \frac{1}{20}\frac{(x-100)}{1!} - \frac{1}{4000}\frac{(x-100)^2}{2!} + \frac{3}{800000}\frac{(x-100)^3}{3!}$ $T_3(101) = 10.0499$ $Respuesta:$ $\sqrt{101} \cong T_3(101) = 10.0499$

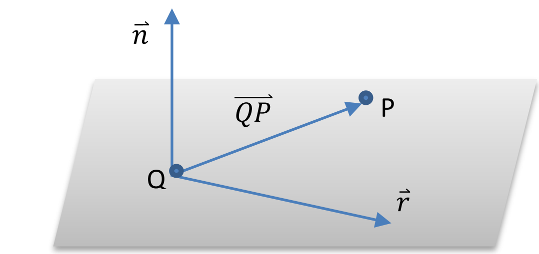
c) Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$ es convergente o divergente. En caso de que converja encuentre la suma.

No	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se plantea la serie de potencias en dos sumatorias separando la fracción. Se evalúa cada sumatoria con el criterio de la razón para determinar su convergencia. $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = L$ $L < 1, Converge$ $L > 1, Diverge$ $L = 1, No\ se\ puede\ concluir$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{6^n}$ $Para\ la\ primera\ sumatoria:$ $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\frac{3^{n+1}}{6^{n+1}}}{\frac{3^n}{6^n}}\right\|$ $= \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{3^n * 3 * 6^n}{3^n * 6^n * 6}\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{3}{6}\right\| = \frac{3}{6}$ $\frac{3}{6} < 1, Converge$

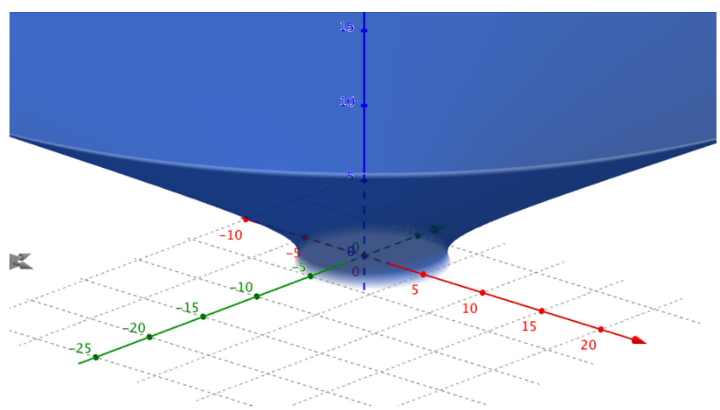
		$Para\ la\ segunda\ sumatoria:$ $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\frac{2^{n+1}}{6^{n+1}}}{\frac{2^n}{6^n}}\right\|$ $= \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{2^n * 2 * 6^n}{2^n * 6^n * 6}\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{2}{6}\right\| = \frac{2}{6}$ $\frac{2}{6} < 1, Converge$ $Como\ ambas\ partes\ de\ la\ sumatoria\ convergen,$ $la\ serie\ converge.$
2.	Se hace el arreglo a cada parte de la sumatoria para plantearla en la forma de la Serie Geométrica para calcular su suma. $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{6^n}$ $= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{6}\right)$ $+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{2}{6}\right)$ $= \frac{\frac{3}{6}}{1-\frac{3}{6}} + \frac{\frac{2}{6}}{1-\frac{2}{6}} = \frac{3}{2}$ $Respuesta:$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n} = \frac{3}{2}$

Tema No. 4: 30 puntos

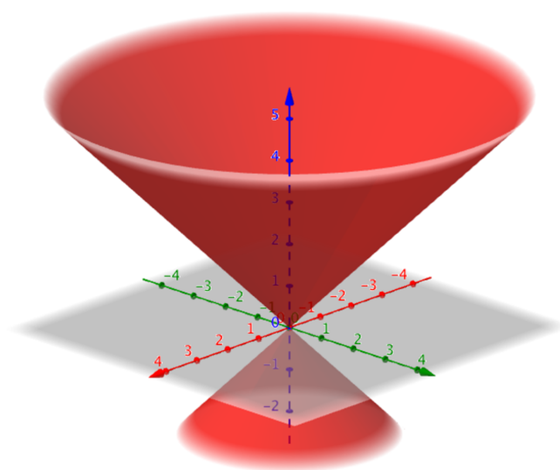
a) Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto $P(6,0,2)$ y contiene a la recta con ecuaciones: $x = 4 - 2t, y = 3 + 5t, z = 7 + 4t$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se plantea un esquema con los datos proporcionados para plantear la ecuación del plano. Q es el punto por donde pasa la recta. $\vec{r}$ es el vector director de la recta. El vector $\overrightarrow{QP}$ se plantea con los puntos Q y P. El vector $\vec{n}$ se encuentra efectuando el producto cruz de los vectores $\vec{r}$ y $\overrightarrow{QP}$. $\vec{n}$ es el vector normal del plano.	 $Q(4,3,7)$ $P(6,0,-2)$ $\vec{r} = \langle -2,5,4 \rangle$ $\overrightarrow{QP} = \langle 6-4, 0-3, -2-7 \rangle = \langle 2,-3,-9 \rangle$ $\vec{r} \times \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & -3 & -9 \end{vmatrix}$ $= \langle -45+12, -(18-8), 6-10 \rangle$ $= \langle -33, -10, -4 \rangle$
2.	Se plantea la ecuación del plano de la forma: $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$	$(x_0, y_0, z_0) = (6,0,-2)$ $\langle a,b,c \rangle = \langle -33,-10,-4 \rangle$ $-33(x-6) - 10(y-0) - 4(z+2) = 0$ $-33x - 10y - 4z = -198 + 8$ $-33x - 10y - 4z = -190$ $Respuesta:$ $-33x - 10y - 4z = -190$

b) Dada la ecuación $x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 13$, redúzcala a su forma estandar, identifique la superficie dando su nombre y luego haga un bosquejo de la misma.

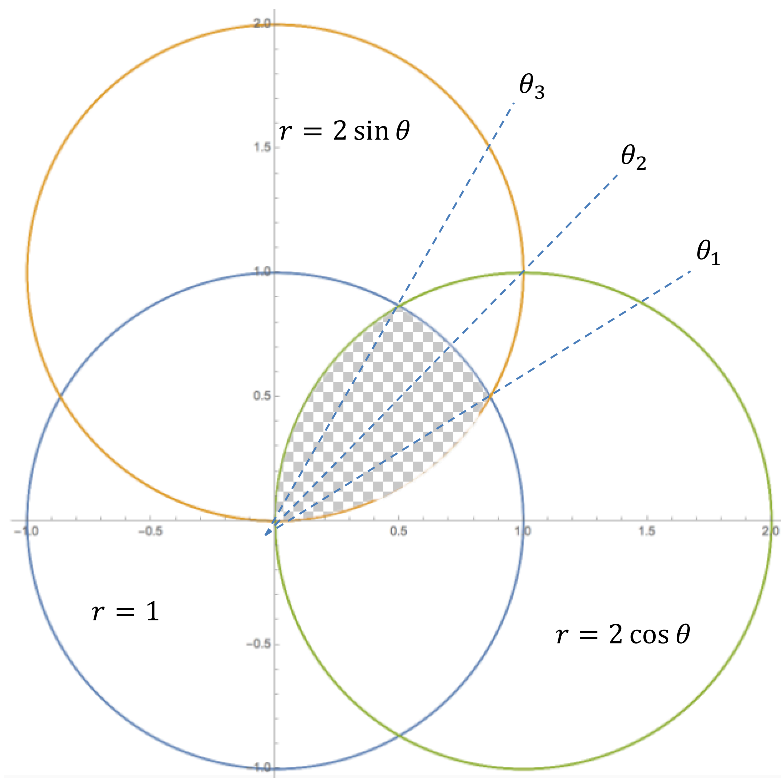
No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se realiza la completación al cuadrado de las variables involucradas en la ecuación, se simplifica la ecuación a una forma conocida.	$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 4z^2 - 8z = 13$ $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 4(z^2 - 2z + 1) = 13 - 4 - 9 + 4$ $(x+2)^2 + (y+3)^2 - 4(z-1)^2 = 4$ $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(z-1)^2}{1} = 1$ $\frac{(x+2)^2}{2^2} + \frac{(y+3)^2}{2^2} - \frac{(z-1)^2}{1^2} = 1$
2.	La ecuación corresponde a un Hiperboliode Elíptico de una Hoja con centro en $(-3, -3, 1)$.	$Respuesta: Hiperboloide\ Elíptico\ de\ una\ Hoja$ $Gráfica:$ 

c) Escriba la ecuación en coordenadas esféricas para la superficie cuya ecuación rectangular es: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, luego haga un bosquejo de la superficie.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se arregla la expresión para sustituir las relaciones entre coordenadas esféricas y rectangulares. $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$ $$z = r\cos\theta$$	$$x^2 + y^2 - z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2z^2$$ $$r^2 = 2r^2\cos\theta$$ $$2\cos\theta = 1$$ $$cos^2\theta = \frac{1}{2}$$ $$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$ $$\theta = \pm\frac{\pi}{4}$$
2.	La expresión corresponde a la gráfica de un cono.	$$Respuesta:$$ $$\theta = \pm\frac{\pi}{4}$$ $$Gráfica:$$ 

Tema No. 3: 20 puntos

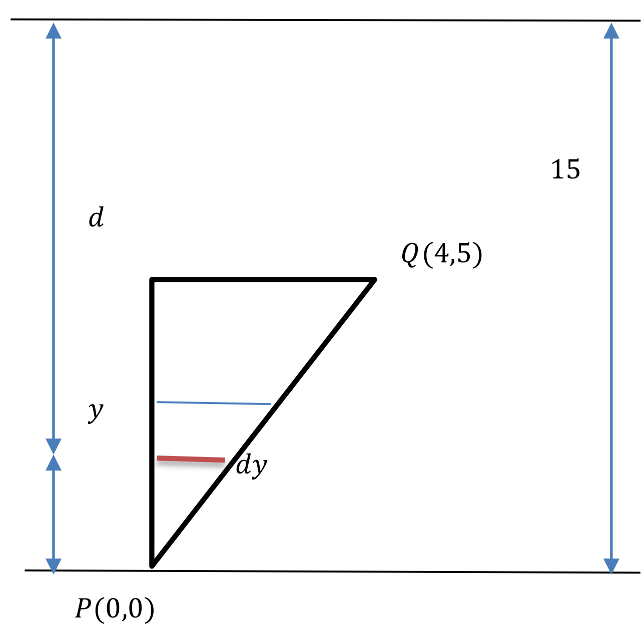
Plantee la integral que calcule el área común a las curvas $r = a, r = 2a\sin\theta$ y $r = 2a\cos\theta$. Haga un bosquejo de las curvas en el mismo plano.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se grafican las curvas para $a = 1$ para determinar el area de la región a calcular. El área común es la parte sombreada de la gráfica.	
2.	Se determinan los ángulos de intersección de las curvas para plantear los límites de las integrales de área.	$Para\ \theta_2$: $2a\sin\theta = 2a\cos\theta$ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$ $\tan\theta = 1$ $\theta_2 = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

		$Para\ \theta_1$: $2a\sin\theta = a$ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ $\theta_1 = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ $Para\ \theta_3$: $2a\cos\theta = a$ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\theta_3 = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$
3.	Se plantean las integrales para calcular el área común a las curvas. $A = \frac{1}{2}\int_a^b (f(\theta))^2 d\theta$	$Entre\ 0\ \ y\ \theta_1$: $A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (2a\sin\theta)^2 d\theta$ $Entre\ \theta_1\ y\ \theta_2$: $A_1 = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} a^2 d\theta$ $Entre\ \theta_2\ y\ \theta_3$: $A_2 = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} a^2 d\theta$ $Entre\ \theta_3\ \ y\ \frac{\pi}{2}$: $A_1 = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} (2a\cos\theta)^2 d\theta$

		$Respuesta:$ $$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/6} (2a\sin\theta)^2 d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/4} a^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} (2a\cos\theta)^2 d\theta$$

Tema No. 4: 20 puntos
Una compuerta tiene forma de triángulo isósceles de 5 pies de altura y 8 pies de ancho (con su vértice hacia abajo). Plantee la integral que calcule la fuerza total del agua sobre la compuerta, si su parte superior está 10 pies debajo de la superficie del agua.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se realiza el esquema de la compuerta para determinar las ecuaciones a utilizar para calcular la fuerza hidrostática. Por simetría, se analiza la mitad de la compuerta.	

2.	Se plantean las ecuaciones a partir del esquema.	$Para\ la\ recta\ PQ$ $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{5-0}{4-0} = \frac{5}{4}$ $Sustituyendo\ en\ la\ ecuación\ de\ la\ recta,$ $utilizando\ el\ punto\ P$ $y - y_0 = m(x - x_0)$ $y - 0 = \frac{5}{4}(x - 0)$ $y = \frac{5}{4} * x$ $Despejando\ x$: $x = \frac{5}{4}y$ $Para\ la\ presión\ del\ fluido, se\ tiene\ la\ ecuación$: $P = \rho g d$ $Del\ esquema\ puede\ notarse\ que$: $d = 15 - y$
3.	La fuerza hidrostática se obtiene sumando las fuerzas sobre todas las secciones de "x", a lo largo de toda la profundidad, integrando a lo largo de la profundidad del agua en la pileta.	$F = \int_0^5 \rho g\ d * x * dy$ $F = \rho g \int_0^5 (15 - y)(x) dy$ $Sustituyendo\ x = \frac{4}{5}y$ $F = \int_0^5 \rho g (15 - y)\left(\frac{4}{5}y\right) dy$

4.	Ya que se tomó la mitad de la pileta para el análisis, la fuerza total sobre la pileta, por simetría es dos veces la expresión planteada en el inciso anterior.	$F_T = 2\rho g \int_0^5 (15 - y)\left(\frac{4}{5}y\right) dy$ $Respuesta$: $F_T = 2(62.5) \int_0^5 (10 - y)\left(\frac{4}{5}y\right) dy$