UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

clave-107-3-V-1-00-2014

CURSO:	**MATEMÁTICA INTERMEDIA I**
SEMESTRE:	**PRIMERO**
CÓDIGO DEL CURSO:	**107**
TIPO DE EXAMEN:	**TERCER PARCIAL**

NOMBRE DE LA PERSONA
QUE RESOLVIÓ EL EXAMEN: **EDGAR ALFREDO SALGUERO UCELO**

NOMBRE DE LA PERSONA
QUE REVISO EL EXAMEN: **INGA. GLENDA GARCÍA**

Universidad de San Carlos de Guatemala *Facultad de Ingeniería*
Departamento de Matemática *Matemática Intermedia I*

Tercer Examen Parcial

Tema No		Puntos /100
I	Dadas las series : $a.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n+2^n}{5^n}$ $b.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3}{2n^3+n}$ $c. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^{\frac{3}{2}}}$ Determine si converge o divergen identificando el criterio usado	(18 puntos)
II	Grafique las ecuaciones en R^3 ; e identifíquelas. $a. x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z = -17$ $b. x = z + 4$	(18 puntos)
III	a) Encuentre la serie de Taylor de $\sqrt[3]{x}$ en a= 8 b) Si $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, utilizando la serie anterior encuentre la serie para e^{x^2} y luego calcule $\int e^{x^2}\,dx$	(18 puntos)
IV	Dada la sucesión$\{\ln(n+2) - \ln(2n)\}$ determine a) Los primeros 5 términos b) Si es convergente o divergente	(10 puntos)
V	a. Calcule la distancia perpendicular del punto (2,3,0) a la recta de intersección de los planos $x - y + z - 2 = 0$ $2x - y + 3z - 5 = 0$ b. Halle la ecuación del plano que pasa por el punto (3,-1,2) y contiene la recta $\frac{x}{-2} = \frac{y-4}{1} = z$	(15 puntos)
VI	Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie de potencias **(Sin analizar los puntos extremos del intervalo)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n\ 3^{2n}}$	(15 puntos)
VII	Un cometa se desplaza en una órbita parabólica alrededor del sol, siendo éste el foco de la parábola. Cuando el cometa está a 80 millones de millas del sol, el segmento de recta desde el sol hasta el cometa forma un Angulo de $\frac{\pi}{3}$ rad con el eje de la órbita. a. Obtenga una ecuación de la órbita del cometa b. ¿Qué tanto se acerca el cometa al sol?	(14 puntos)

Tema No. I

Utilizando el criterio de la Serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 2^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$\left|\frac{4}{5}\right| < 1$ y $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$ converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 2^n}{5^n} = \frac{1}{1 - \frac{4}{5}} + \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{20}{3}$$

Utilizando el criterio de n-esimo termino (divergencia)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3}{2n^3 + n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{2n^3 + n} = \frac{3}{2} \neq 0 \; diverge$$

Utilizando P- serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$p > \frac{3}{2} > 1 \; converge$$

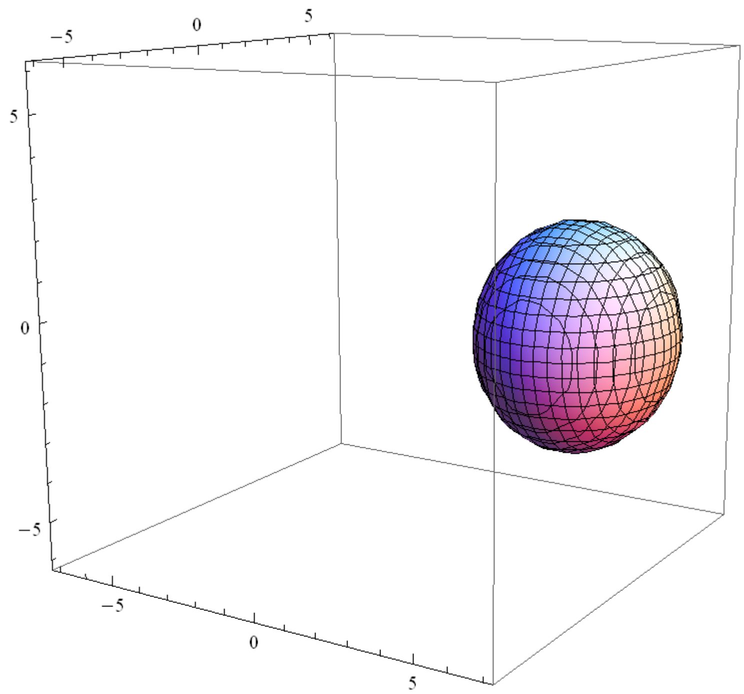
Tema No II

$$a. x^2 + \; y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z = -17$$

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) = -17 + 26$$

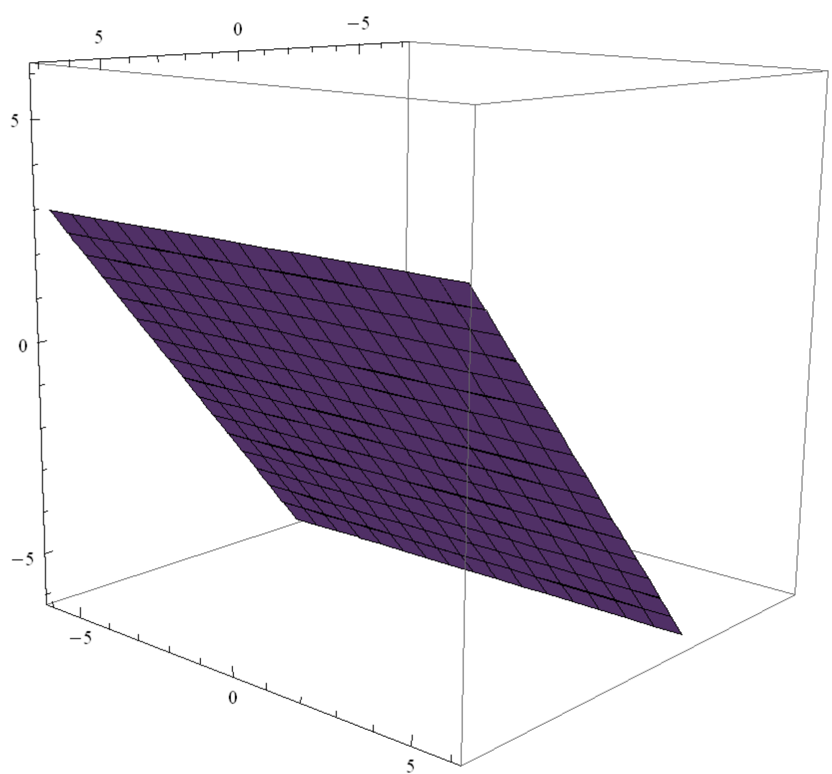
$$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 9$$

Esfera con centro (-4, 3,-1) r=3



$b. x = z + 4$

Plano paralelo al eje y



Tema III

a) Encuentre la serie de Taylor de $\sqrt[3]{x}$ en a= 8

$$f = \sqrt[3]{x} \quad f(8) = 2$$

$$f' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \quad f'(8) = \frac{1}{3} (\frac{1}{4})$$

$$f'' = -\frac{1}{3} * \frac{1}{3} * 2 * x^{-\frac{5}{3}} f''(8) = -\frac{1}{3} * \frac{1}{3} * 2 * \left(\frac{1}{32}\right)$$

$$f''' = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * 2 * 5 * x^{-\frac{8}{3}} f'''(8) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * 2 * 5 * \left(\frac{1}{256}\right)$$

$$f^{IV} = -\frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * 2 * 5 * 8 * x^{-\frac{11}{3}} \quad f^{IV}(8) = -\frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * 2 * 5 * 8 * \left(\frac{1}{2048}\right)$$

$$\sqrt[3]{x} = 2 + \frac{x-8}{12} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{[2 * 5 * 8 \ldots .(3n-4)]\,(x-8)^n}{2^{3n-1} n!}$$

b) Si $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, utilizando la serie anterior encuentre la serie para e^{x^2} y luego calcule $\int e^{x^2}\,dx$

Si $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Entonces

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\int e^{x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

Tema IV

Dada la sucesión$\{\ln(n+2) - \ln(2n)\}$ determine

a) Los primeros 5 términos

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right),\ \ln(1),\ \ln\left(\frac{5}{6}\right),\ \ln\left(\frac{6}{8}\right),\ \ln\left(\frac{7}{10}\right)$$

b) Si es convergente o divergente

$$\{\ln(n+2) - \ln(2n)\} = \ln\left(\frac{n+2}{2n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+2}{2n}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad converge$$

Tema V

a) Encontrando la recta de intersección entre los planos

$$\begin{array}{c} x - y + z - 2 = 0 \\ \underline{2x - y + 3z - 5 = 0} \\ x + 2z - 3 = 0 \end{array}$$

Recta de intersección

$$x = 3 - 2t$$
$$y = 1 - t$$
$$z = t$$

Vector de la recta de intersección $U =< -2, -1,\ 1 >$
Punto de la recta Po (3,1,0)
Punto P1(2,3,0)
Encontrando el vector V(Po P1)

$$v(PoP1) =< -1,2,0 >$$

$$v(PoP1)X\ U = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =< 2,1,5 >$$

$$d = \frac{|v(PoP1)X\ U|}{|U|} = \frac{\sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 +\ 1^2}} = \sqrt{\frac{30}{6}} = \sqrt{5}$$

b) Plano que pasa por (3,-1,2) contiene $\frac{x}{-2} = \frac{y-4}{1} = z$

Vector U= < -2, 1, 1> Po (0,4, 0)

Encontrando vector V(Po P1) = < 3,-5, 2 >

Encontrando el vector Normal del plano

$$V(PoP1)X\ U = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = < 7,7,7 >$$

$$7(x - 3) + 7(y + 1) + 7(z - 2) = 0$$
$$7x - 21 + 7y + 7 + 7z - 14 = 0$$
$$7x + 7y + 7z = 28$$
$$x + y + z = 4$$

Tema VI

Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie de potencias
(Sin analizar los puntos extremos del intervalo)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n\, 3^{2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{an+1}{an}\right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)3^{2(n+1)}}}{\frac{(x+2)^n}{n\, 3^{2n}}}\right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(x+2)^{n+1} * n\, 3^{2n}}{(n+1)3^{2(n+1)}(x+2)^n}\right| < 1$$

$$|x+2| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{(n+1)3^2}\right| < 1$$

$$\frac{1}{9}|x+2| < 1$$

$$|x+2| < 9$$

Radio =9

Intervalo

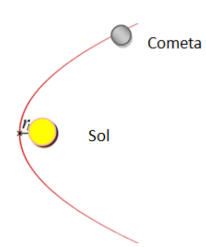
$$-9 < x+2 < 9$$

$$-11 < x < 7$$

Tema VII

Un cometa se desplaza en una órbita parabólica alrededor del sol, siendo éste el foco de la parábola. Cuando el cometa está a 80 millones de millas del sol, el segmento de recta desde el sol hasta el cometa forma un Angulo de $\frac{\pi}{3}$ rad con el eje de la órbita.

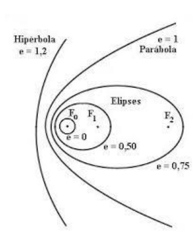
a. Obtenga una ecuación de la órbita del cometa
b. ¿Qué tanto se acerca el cometa al sol?



a.

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$$

e = 1 orbita parabólica



Encontrando d cuando $r = 80x10^6$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$80x10^6 = \frac{d}{1 - cos\frac{\pi}{3}}$$

$$80x10^6\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = d$$
$$d = 40x10^6$$

$$r = \frac{40x10^6}{1 - \cos(\theta)}$$

b. cuando $\theta = \pi$

$$r = \frac{40x10^6}{1 - cos(\pi)} = 2x10^6$$