clave-107-2-V-1-00-2015-sN

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO:	Matemática Intermedia 1
JORNADA:	Vespertina
Semestre	Segundo
AÑO:	2015
TIPO DE EXAMEN:	Segundo Parcial
NOMBRE DE LA PERSONA QUE RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Edgar Salguero
NOMBRE DE LA PERSONA QUE REVISÓ EL EXAMEN:	Inga. Glenda García

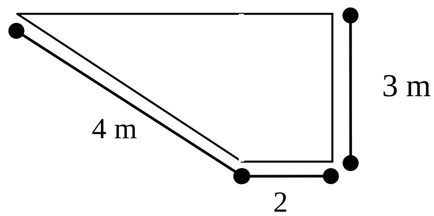
UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS
FACULTAD DE INGENIERÍA 17032015
MATEMÁTICA INTERMEDIA 1 **SEGUNDO EXAMEN PARCIAL**

Nombre____**Carne:**____________________

(20 PUNTOS)

TEMA 1

Una placa tiene la forma de la región indicada en la figura; se coloca verticalmente dentro de un tanque que contiene agua, la parte superior de la placa está 2 m bajo la superficie del agua. Determine la fuerza ejercida por la presión del agua sobre la placa.



TEMA 2 **(20 PUNTOS)**

Dadas las ecuaciones $\begin{cases} r = 2\cos\theta \\ r^2 = 4sen\,\theta \end{cases}$

a. Nombre y trace la gráfica las ecuaciones, encontrando puntos de intersección
b. Plantee una integral que calcule el área de la región dentro de la primera y fuera de la segunda.

TEMA 3: **(45 PUNTOS)**

3.1 Encontrar el centroide de la región limitada por la recta $y = 2x - 1;\ y = x^2 - 4$ (15)

3.2 Sea una curva representada por las ecuaciones $\boldsymbol{x = 2 + sen\,t}$ & $\boldsymbol{y = 3\cos t}$ $\boldsymbol{\pi \le t \le 2\pi}$

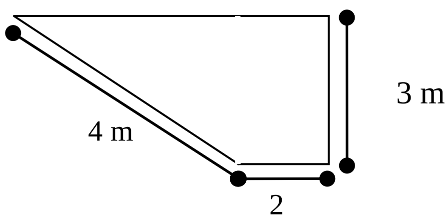
a. Bosqueje la curva usando las ecuaciones paramétricas e indique la dirección en la que se traza la curva cuando aumenta t
b. Elimine el parámetro y encuentre una ecuación en coordenadas cartesianas
c. Plantee la integral para calcular la longitud de la curva en el intervalo dado
d. Calcule la integral anterior por la regla de Simpson con $n = 6$.
e. Si la curva se hace girar respecto al eje X; plantee la integral que represente el área superficial (30)

TEMA 4: **(15 PUNTOS)**

Determine si la integral converge $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x + x^3}\,dx$

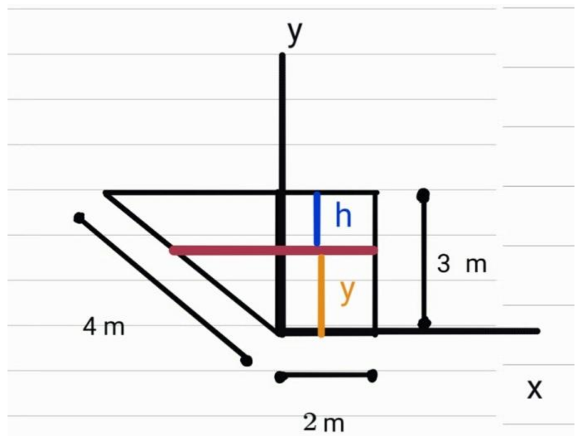
TEMA 1

Una placa tiene la forma de la región indicada en la figura; se coloca verticalmente dentro de un tanque que contiene agua, la parte superior de la placa está 2 m bajo la superficie del agua. Determine la fuerza ejercida por la presión del agua sobre la placa.



Altura

$$h = 5 - y$$



$$\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

$$m = \frac{3-0}{-\sqrt{7}-0} = -\frac{3}{\sqrt{7}}$$

Encontrando la recta que sale del origen con pendiente negativa

$$y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x$$

$$x = -\frac{\sqrt{7}}{3}y$$

El diferencial de área esta dado por la diferencia de la recta x=2 menos la recta $x = -\frac{\sqrt{7}}{3}y$ (curva de la derecha menos curva de la izquierda)

$$1000\frac{kg}{m^3} * 9.8\frac{m}{s^2}\int_0^3 (5-y)(2-\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}y\right)dy$$

$$10y + \frac{5\sqrt{7}}{6}y^2 - y^2 - \frac{\sqrt{7}}{9}y^3\Big|_0^3 = 1000\frac{kg}{m^3} * 9.8\frac{m}{s^2} * 32.90\ m = 322{,}420\frac{N}{m^2}$$

Tema 2

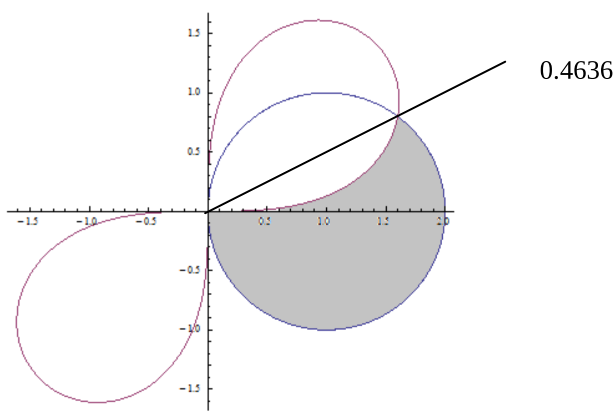
Dadas las ecuaciones $\begin{cases} r = 2\cos\theta \\ r^2 = 4sen\ 2\theta \end{cases}$

a. Nombre y trace la gráfica las ecuaciones, encontrando puntos de intersección

$$r = 2\cos\theta\ \ Circunferencia$$
$$r^2 = 4sen\ \theta\ Lemniscata$$

Encontrando puntos de intersección

$$2\cos\theta = \sqrt{4sen\ 2\theta}$$
$$(2\cos\theta)^2 = 4sen\ 2\theta$$
$$(2\cos\theta)^2 = 4(2sen\ \theta\ Cos\ \theta)$$
$$Cos\ \theta = 2sen\ \theta$$
$$\frac{1}{2} = \tan\theta$$
$$\theta = 0.4636$$

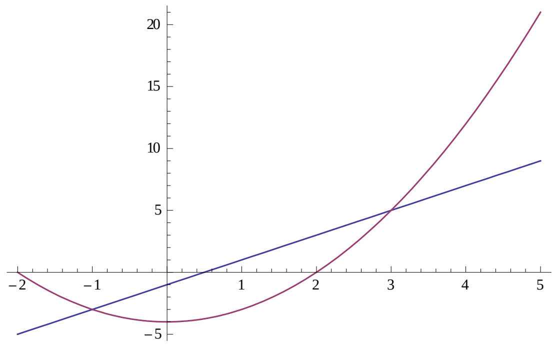


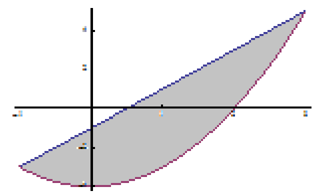
b. Plantee una integral que calcule el área de la región dentro de la primera y fuera de la segunda.

$$\frac{1}{2}\int_0^{0.4636} (2\cos\theta)^2 - 4sen\ 2\theta\ d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (2\cos\theta)^2\ d\theta$$

TEMA:

3.1 Encontrar el centroide de la región limitada por la recta $y = 2x - 1;\ y = x^2 - 4$





Encontrando los puntos de intersección

$$2x - 1 = x^2 - 4$$

$$x^2 - 2x - 3$$

$$(x-3)(x+1)$$

$$x = 3, \qquad x = -1$$

Encontrando el área

$$A = \int_{-1}^{3} (2x - 1 - x^2 + 4)\,dx \;=\; x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x \,\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{32}{3}$$

Encontrando el centroide de la region

$$\bar{x} = \frac{1}{\frac{32}{3}} \int_{-1}^{3} x * (2x - 1 - x^2 + 4)\,dx \;=\; \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2 \,\Bigg|_{-1}^{3} = 1$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\frac{2(32)}{3}} \int_{-1}^{3} (2x-1)^2 - (x^2-4)^2\,dx = -\frac{1}{5}x^5 - \frac{12x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 - 15x \,\Bigg|_{-1}^{3} = -\frac{3}{5}$$

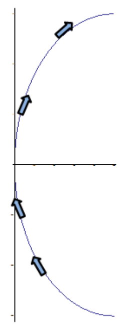
Centroide

$$\left(1, -\frac{3}{5}\right)$$

3.2 Sea una curva representada por las ecuaciones

$\boldsymbol{x = 2 + sen\, t}$ & $\boldsymbol{y = 3\cos t}$ $\boldsymbol{\pi \le t \le 2\pi}$

a. Bosqueje la curva usando las ecuaciones paramétricas e indique la dirección en la que se traza la curva cuando aumenta t



b. Elimine el parámetro y encuentre una ecuación en coordenadas cartesianas
Despejando coseno y seno para utilizar identidad

Despejamos el seno de la función de x y el coseno de la función de y

$$\boldsymbol{x - 2 = sen\, t}$$

$$\boldsymbol{\frac{y}{3} = \cos t}$$

Utilizando la identidad de $\boldsymbol{sen\, t^2 + \cos t^2 = 1}$

$$\boldsymbol{(x-2)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1}$$

$$\boldsymbol{y = 3\sqrt{1 - (x-2)^2}}$$

c. Plantee la integral para calcular la longitud de la curva en el intervalo dado

$$\boldsymbol{\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{(\cos t)^2 + (-3\, sen\, t)^2}\, dt}$$

d. Calcule la integral anterior por la regla de Simpson con $n = 6$.

$\boldsymbol{\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{(\cos t)^2 + (-3\, sen\, t)^2}\, dt \quad n = 6 \quad \Delta x = \frac{2\pi - \pi}{6} = \frac{\pi}{6}}$

$$\boldsymbol{s = \frac{\Delta x}{3}\left[f(\pi) + 4f\left(\frac{7\pi}{6}\right) + 2f\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 4f\left(\frac{11\pi}{6}\right) + f(2\pi)\right]}$$

$$\boldsymbol{s = \frac{\pi}{18}[38.4394] = 6.7089}$$

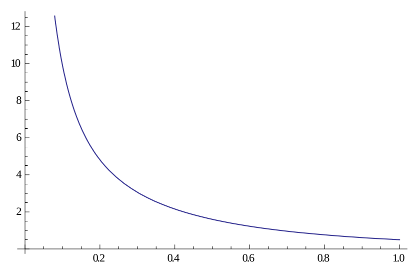
e. Si la curva se hace girar respecto al eje X; plantee la integral que represente el área superficial

$$\int_{\pi}^{2\pi} 3\cos t\sqrt{(\cos t)^2 + (-3\,\operatorname{sen} t)^2}\,dt$$

TEMA 4

Determine si la integral converge $\int_0^1 \frac{1}{x+x^3}\,dx$

Región del área



Utilizando la técnica de fracciones parciales

$$\int_0^1 \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

Encontrando las constantes A, B, C

$$1 = A + Ax^2 + Bx^2 + Cx$$
$$A = 1$$
$$A + B = 0$$
$$C = 0$$
$$B = -1$$

Se plantea la integral

$$\lim_{b\to 0}\int_b^1 \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

Se evalúa con limites donde es discontinua la función

$$\lim_{b\to 0} \ln x - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^b = \infty$$