UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-107-5-V-1-00-2016

CURSO:	**Matemática Intermedia 1**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**107**
TIPO DE EXAMEN:	**Primera Retrasada**
FECHA DE EXAMEN:	**24 de Mayo del 2016**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Melvin Saúl Calel Otzoy**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Inga. Vera Marroquín**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Melvin Saúl Calel Otzoy**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemática
Matemática Básica 1

24 de mayo de 2016 **Primera Retrasada** **Temario Único**

Tema No. 1 (30 puntos)

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} dx$

b) $\int_0^\infty xe^{-2x} dx$

c) Utilice la regla de Simpson con $n = 6$ para calcular $\int_0^\pi \sin(x^2)\, dx$

Tema No. 2 (15 puntos)

a) Dibuje la representación gráfica de las curvas $r = 2\cos\theta$ y $r = \frac{8}{4+\cos\theta}$

b) Plantee una integral para calcular el área de la región dentro de la primera curva y fuera de la primera.

Tema No. 3 (20 puntos)

a) Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}(x-2)^n}{4^n}$$

b) Encuentre una serie de Maclaurin para la función $f(x) = e^{-x^2}$, construyendo primero la serie para la función $f(x) = e^x$

Tema No. 4 (25 puntos)

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta en donde se interesan los planos. (8 puntos)

$$x + 2y - z = 6 \quad \& \quad x - y + 3z = -2$$

b) Determine si las rectas se intersectan, si son paralelas a si son oblicuas. Si no se intersectan encuentre la distancia entre ellas. (8 puntos)

$$x = 1 + 2t, \quad y = 3 - 4t, \quad z = -5 + 6t \quad \& \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-3}$$

c) Grafique en R^3 e identifique las superficies siguientes. (9 puntos)

i) $z = r^2$ ii) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ iii) $\rho \sin \emptyset = 3$

Tema No. 5 (10 puntos)

Encuentre la superficie de revolución que se obtiene al girar la región limitada por la curva

$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$ y las rectas $x = 1$ && $x = 2$, alrededor del eje y.

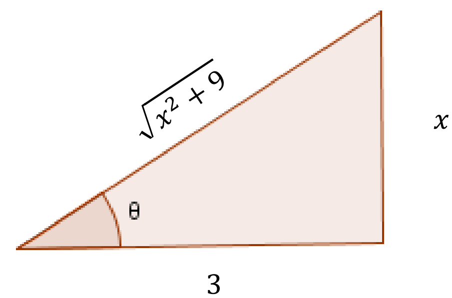
Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Básica 1**

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 30 puntos

Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} dx$

No.	Explicación	Operatoria
1.	La integral se resuelve por el método de sustitución trigonométrica, se plantea el triángulo y las sustituciones derivadas del mismo.	 $\tan\theta = \frac{x}{3} \rightarrow x = 3\tan\theta$ $dx = 3\, sec^2\theta\, d\theta$ $\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} \rightarrow \sqrt{x^2+9} = 3\sec\theta$
2.	Se realizan las sustituciones en la integral. Se simplifica la expresión.	$\int \frac{3\sec\theta\, 3\, sec^2\theta\, d\theta}{3\tan\theta} = 3\int \frac{\sec\theta(1+tan^2\theta)\, d\theta}{\tan\theta}$ $= 3\int \frac{\sec\theta\, d\theta}{\tan\theta} + 3\int \frac{\sec\theta\, tan^2\theta\, d\theta}{\tan\theta}$ $= 3\int \csc\theta\, d\theta + 3\int \sec\theta\tan\theta\, d\theta$ $= 3\, Ln\lvert\csc\theta - \cot\theta\rvert + 3\sec\theta$ $\csc\theta = \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} \rightarrow \theta = \csc^{-1}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}$

		$\cot\theta = \frac{3}{x} \rightarrow \theta = \cot^{-1}\frac{3}{x}$ $\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} \rightarrow \theta = \sec^{-1}\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$ $= 3\,Ln\left\|\csc\csc^{-1}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} - \cot\cot^{-1}\frac{3}{x}\right\|$ $+ 3\sec\sec^{-1}\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$ $= 3\,Ln\left\|\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} - \frac{3}{x}\right\| + \sqrt{x^2+9}$

R./

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx == 3\,Ln\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} - \frac{3}{x}\right| + \sqrt{x^2+9} + C$$

b) $\int_0^{\infty} xe^{-2x}dx$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica el método de integración por partes para resolver la integral. Se plantean las sustituciones para la integral.	$u = x \qquad du = dx$ $dv = e^{-2x}dx \qquad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$
2.	Se aplica la definición para resolver la integral. $uv - \int v\,du$ Se simplifican los términos.	$\int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx$ $= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$
3.	Como es una integral con un límite al infinito, se trata como un límite en la sustitución, sustituyendo $\infty \rightarrow a$.	$\lim_{a\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}ae^{-2a} - \frac{1}{2}(0)\right) - \left(\frac{1}{4}e^{-2a} - \frac{1}{4}e^{-2(0)}\right)\right]$

	Se evalúa la integral por el teorema fundamenta	$Aplicando\ L'Hospital\ al\ término\ \frac{1}{2}ae^{-2a}$ $$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2}ae^{-2a}=\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\frac{a}{e^{2a}}=\frac{\infty}{\infty}\to F.I.$$ $$\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\frac{1}{e^{2a}}=\frac{1}{\infty}\to 0$$ $$=(0-0)-\left(0-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

R./

$$\int_0^\infty xe^{-2x}dx=\frac{1}{4}$$

c) Utilice la regla de Simpson con $n=6$ para calcular $\int_0^\pi \sin(x^2)\,dx$

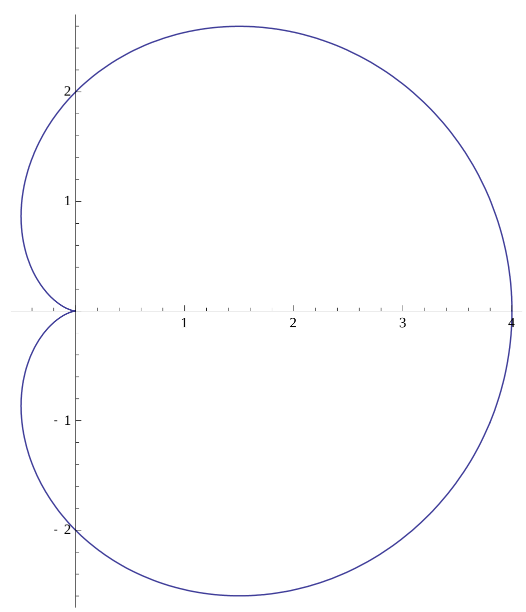
No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica la definición del método de Simpson: $$\int_a^b f(x)\,dx\approx S_n$$ $$=\frac{\Delta x}{3}\begin{bmatrix} f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)\\ +4f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-2})\\ +4f(x_{n-1})+f(x_n)\end{bmatrix}$$ $$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$	$Si\quad 0\le x\le\pi$ $$\Delta x=\frac{\pi-0}{6}=\frac{\pi}{6}$$ $$f(x)=\sin x^2$$
2.	Se sustituye desde $x_0=0$, $x_1=\pi/6$, $x_2=2\pi/6$, $x_3=3\pi/6$, $x_4=4\pi/6$, $x_5=5\pi/6$ y $x_6=6\pi/6$ en la ecuación $\sin(x^2)$ Luego se aplica la fórmula para el método de Simpson.	$$S_6=\frac{\pi/6}{3}\begin{bmatrix}0.0000+4(0.2707)+2(0.8897)\\ +4(0.6242)+2(-0.9474)\\ +4(0.5402)+(-0.4303)\end{bmatrix}$$ $S_6=0.9067$

R./

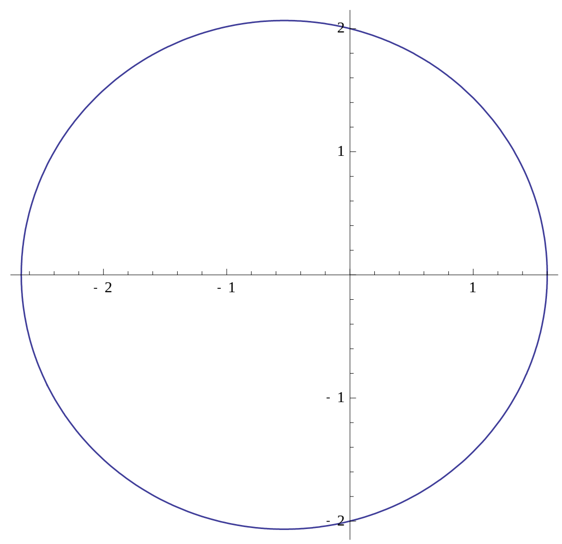
$$\int_0^{\pi} \sin(x^2)\, dx \approx S_6 = 0.9067$$

Tema 2: 15 puntos.

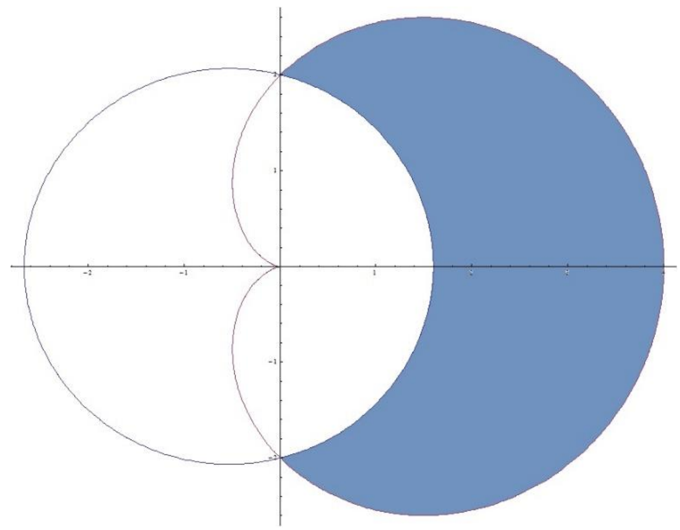
a) Dibuje la representación gráfica de las curvas $r = 2 + 2\cos\theta$ y $r = \frac{8}{4+\cos\theta}$

<table>
<tr><th>No</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Para la gráfica de la curva $r = 2 + 2\cos\theta$, se evalúa la función en valores contenidos en $0 \le \theta \le 2\pi$</td><td>
<table>
<tr><th>θ</th><th>$2 + 2\cos\theta$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$\pi/4$</td><td>3.41</td></tr>
<tr><td>$2\pi/4$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$3\pi/4$</td><td>0.58</td></tr>
<tr><td>$4\pi/4$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$5\pi/4$</td><td>0.58</td></tr>
<tr><td>$6\pi/4$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$7\pi/4$</td><td>3.41</td></tr>
<tr><td>$8\pi/4$</td><td>4</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Se grafican los puntos en el plano de coordenadas polares.</td><td>


</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>3.</td>
<td>Para la gráfica de la curva $r = \frac{8}{4+\cos\theta}$, se evalúa la función en valores contenidos en $0 \leq \theta \leq 2\pi$</td>
<td>
<table>
<tr><th>θ</th><th>$\dfrac{8}{4+\cos\theta}$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1.6</td></tr>
<tr><td>$\pi/4$</td><td>1.69</td></tr>
<tr><td>$2\pi/4$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$3\pi/4$</td><td>2.42</td></tr>
<tr><td>$4\pi/4$</td><td>2.66</td></tr>
<tr><td>$5\pi/4$</td><td>2.42</td></tr>
<tr><td>$6\pi/4$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>$7\pi/4$</td><td>1.69</td></tr>
<tr><td>$8\pi/4$</td><td>1.6</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>4.</td>
<td>Se grafican los puntos en el plano de coordenadas polares.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

b) Plantee una integral para calcular el área de la región dentro de la curva $2 + 2\cos\theta$ y fuera de la curva $8/4 + \cos\theta$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se grafican ambas curvas en un plano para identificar el área a calcular.	
2.	Se calculan lo puntos de intersección de ambas curvas para plantear la integral que calcule el área indicada.	$\frac{8}{4+\cos\theta} = 2 + 2\cos\theta$ $8 = (2 + 2\cos\theta)(4 + \cos\theta)$ $8 = 8 + 2\cos\theta + 8\cos\theta + 2cos^2\theta$ $2cos^2\theta + 10\cos\theta = 0$ $2\cos\theta\,(\cos\theta + 5) = 0$ $2\cos\theta = 0$ $\theta = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ $\cos t = -5$ $\theta = \cos^{-1} -5 = \nexists$

3.	Se aplica la definición para el área en curvas polares. $$A = \frac{1}{2}\int_a^b r(\theta)^2 d\theta$$ El área sombreada, por simetría, es el área dentro de la curva $r = 2 + 2\cos\theta$, en el intervalo $0 \le \theta \le \pi/2$, menos el área de la curva $r = 8/4 + \cos\theta$ en el mismo intervalo.	$$A = 2 * \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos\theta)^2 d\theta - 2 * \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{8}{4+\cos\theta}\right)^2 d\theta$$

R./

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos\theta)^2 d\theta - \int_0^{\pi/2} \left(\frac{8}{4+\cos\theta}\right)^2 d\theta$$

Tema 3: 20 puntos

a) Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n+1}(x-2)^n}{4^n}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica el criterio de la razón para determinar si la serie converge y su intervalo de convergencia. $$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\|$$	Sea $$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1+1}(x-2)^{n+1}}{4^{n+1}}}{\frac{(-1)^n 2^{n+1}(x-2)^n}{4^n}}\right\|$$ $$= \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\frac{(-1)(-1)^n 2^n 4(x-2)^n(x-2)}{4*4^n}}{\frac{(-1)^n 2^n 2(x-2)^n}{4^n}}\right\|$$ $$= \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{(-1)(-1)^n 2^n 4(x-2)^n(x-2)4^n}{4*4^n(-1)^n 2^n 2(x-2)^n}\right\|$$ $$= \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{-(x-2)}{2}\right\| = \frac{-(x-2)}{2}\lim_{n\to\infty} 1$$

		$La\ serie\ converge\ si\ \left\lvert\frac{-(x-2)}{2}\right\rvert < 1$ $-1 < \frac{x-2}{2} < 1$ $-2 < x-2 < 1$ $-2+2 < x < 2+2$ $0 < x < 4$

R./

$$La\ Serie\ Converge$$

$$Intervalo\ de\ Convergencia\ \rightarrow \{0,4\}$$

b) Encuentre una serie de Maclaurin para la función $f(x) = e^{-x^2}$, construyendo primero la serie para la función $f(x) = e^x$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se calculan las derivadas y se evalúan en cero, ya que se trata de una serie de Maclaurin. Se aplica la definición de la serie de Maclaurin para la función dada. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)x^n}{n!}$ $= \frac{f(0)x^0}{0!} + \frac{f'(0)x^1}{1!}$ $+ \frac{f''(0)x^2}{2!} + \cdots \frac{f^n(0)x^n}{n}$	$f(x) = e^x \rightarrow f(0) = 1$ $f'(x) = e^x \rightarrow f'(0) = 1$ $f''(x) = e^x \rightarrow f''(0) = 1$ $f'''(x) = e^x \rightarrow f'''(0) = 1$ $e^x = \frac{1x^0}{0!} + \frac{1x^1}{1!} + \frac{1x^2}{2!}\frac{1x^3}{3!} + \cdots$ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
2.	A partir de la serie de potencias para e^x, se hacen los arreglos para llegar a la función e^{-x^2}.	$x \rightarrow -x$ $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$

		$x \to x^2$ $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

R./

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

Tema 4: 25 puntos

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta en donde se interesan los planos. (8 puntos)

$$x + 2y - z = 6 \quad \& \quad x - y + 3z = -2$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica el método de Gauss-Jordan para encontrar las ecuaciones de la recta de intersección de los planos dados. Se plantea la matriz aumentada con las dos ecuaciones de los planos.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $F2 - F1$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ $F2 \to -\frac{1}{3}F2$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4/3 & 8/3 \end{pmatrix}$ $F1 - 2F2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -4/3 & 8/3 \end{pmatrix}$
2.	Se plantean las ecuaciones a partir de la matriz operada.	$En\ la\ fila\ 1$ $z = t$

		$y-\frac{4}{3}t=\frac{8}{3}$ $En\ la\ fila\ 2$ $y=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}t$ $x+\frac{5}{3}t=\frac{2}{3}$ $x=\frac{2}{3}-\frac{5}{3}t$

R./

$Ecuaciones\ paramétricas\ de\ la\ recta\ de\ intersección\ de\ los\ planos$:

$$x=\frac{2}{3}+\frac{5}{3}t$$

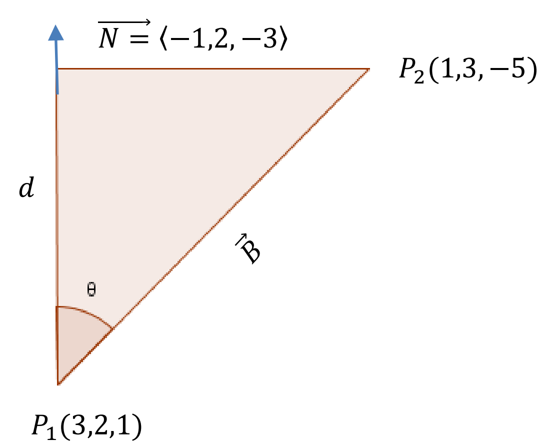
$$y=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}t$$

$$z=0+t$$

b) Determine si las rectas se intersectan, si son paralelas a si son oblicuas. Si no se intersectan encuentre la distancia entre ellas. (8 puntos)

$$x=1+2t,\quad y=3-4t,\quad z=-5+6t\quad \& \quad \frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-3}$$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se comparan los vectores directores para determinar primero si son rectas paralelas. Para que $\overrightarrow{A_1}//\overrightarrow{A_2}$, uno debe ser el múltiplo escalar del otro.	Si $\overrightarrow{A_1}=\langle 2,-4,6\rangle$ $\overrightarrow{A_2}=\langle -1,2,-3\rangle$

		$\overrightarrow{A_1} = k\overrightarrow{A_2}$ $\langle 2, -4, 6\rangle = \langle -k, 2k, -3k\rangle$ $2 = -k \;\rightarrow\; k = -2$ $-4 = 2k \;\rightarrow\; k = -2$ $6 = -3k \;\rightarrow\; k = -2$ $Son\ paralelos$
2.	Las planos son paralelos, para encontrar la distancia entre los planos, encontramos la distancia de un punto del plano P_2: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-3}$ Al plano P_1: $x = 1 + 2t, \quad y = 3 - 4t, \quad z = -5 + 6t$ Se dibuja el esquema para hallar la distancia.	
3.	Se encuentra la distancia con el esquema planteado.	$d = Comp_{\vec{N}}\vec{B} = \frac{\vec{B}.\vec{N}}{\lvert\vec{N}\rvert}$ $\vec{B} = P_2 - P_1 = \langle 1-3, 3-2, -5-1\rangle$ $\vec{B} = \langle -2, 1, -6\rangle$ $d = \left\lvert\frac{\langle -2, 1, -6\rangle\langle -1, 2, -3\rangle}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\right\rvert = \left\lvert\frac{2+2+18}{\sqrt{14}}\right\rvert$ $d = \frac{22}{\sqrt{14}}$

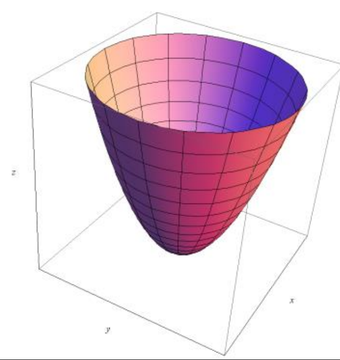
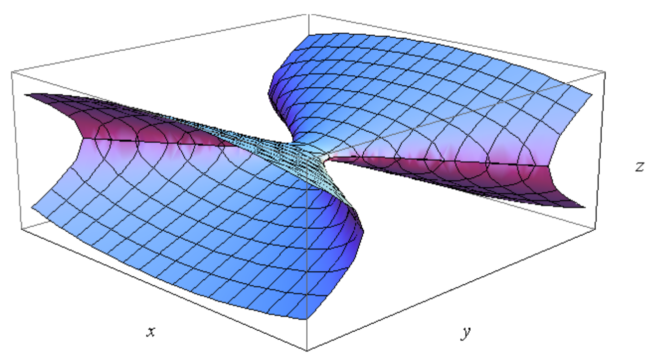
R./

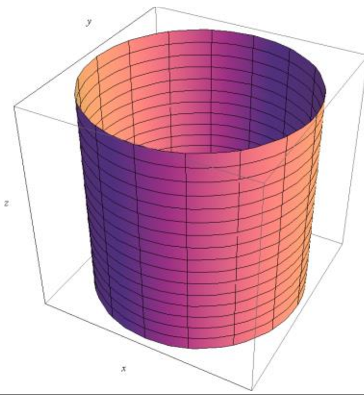
$$Los\ planos\ son\ paralelos$$

$$Distancia\ entre\ planos \rightarrow\ \ d = \frac{22}{\sqrt{14}}$$

c) Grafique en R^3 e identifique las superficies siguientes. (9 puntos)

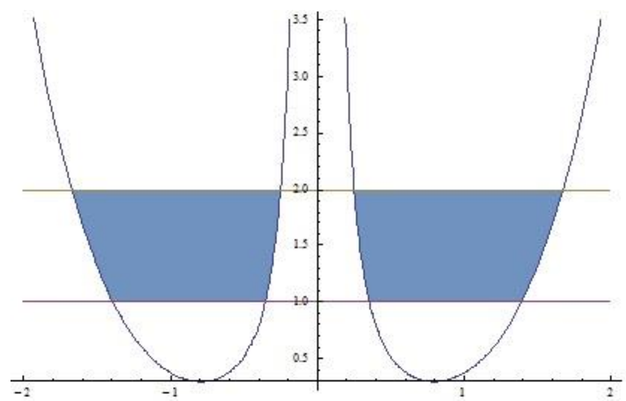
i) $z = r^2$ ii) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ iii) $\rho \sin \emptyset = 3$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	i) $z = r^2$ Paraboloide Elíptico	
2.	ii) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ Hiperboloide Elíptico de una hoja	

3.	iii) $\rho \sin \emptyset = 3$ Cilindro Circular	

Tema 5: 10 puntos.

Encuentre la superficie de revolución que se obtiene al girar la región limitada por la curva $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}$ y las rectas $x = 1$ && $x = 2$, alrededor del eje y.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se grafican las trazas los ejes X, Y para visualizar la superficie de revolución.	
2.	Se traza el sólido de revolución correspondiente a la gráfica.