UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

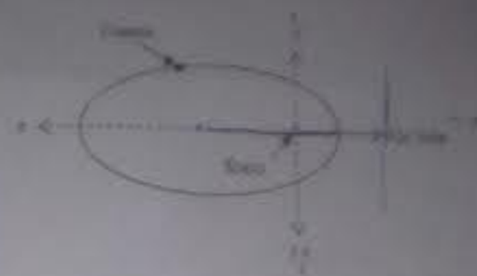
CURSO:	Matemática Intermedia 1
JORNADA:	Matutina
SEMESTRE:	1er. Semestre
AÑO:	2014
TIPO DE EXAMEN:	Tercer Parcial
NOMBRE DE LA PERSONA QUE RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Pablo Aldana
NOMBRE DE LA PERSONA QUE REVISÓ EL EXAMEN:	Inga. Vera Marroquín

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Jornada Matutina

Matemática Intermedia 1
Departamento de Matemática
30 de abril de 2014
Temario "Y"

Tercer Examen Parcial

Tema 1: 12 puntos



El cometa Hale-Bopp, descubierto en 1995 se mueve en una órbita elíptica con un foco en el sol como muestra la figura. Si la excentricidad es 0.9951 y la longitud del semieje mayor es 186UA. Tomado en cuenta el gráfico encuentre la ecuación de la órbita de dicho cometa y determine la distancia mínima (perihelio) del cometa al Sol?

Tema 2 (38puntos)

a. Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto $(-3,2,0)$ y la recta de intersección de los planos: $-x+3y-2z=5$ $x-2y+3z=1$ (12 puntos)

b. Utilizando vectores, calcule el área del paralelogramo con vértices en A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(6, 5, 2) y D(7, 7, 5), primero trazando el paralelogramo en R^3 y analizando cuáles son los lados paralelos. (6 puntos)

c. Muestre que las rectas se cortan, encontrando el punto de intersección,

$x=t,\ y=2-t,\ z=t+1;$ $\qquad x=2s+2,\ y=s+3,\ z=5s+6$ (8 puntos)

d. Grafique e identifique en R^3:

i. $x^2+y^2+z^2-2=2x+2z$ (4 puntos)

ii. $3x+y=6$ (4 puntos)

iii. $z=5$ (4 puntos)

Tema 3 (20 puntos)

a. Sabiendo que $\sum_{n=0}^{\infty}(x)^n=\frac{1}{1-x}$ encuentre una serie para $f(x)=x^4\ln(1-x)$

b. Encuentre una serie de Taylor de la función $f(x)=\sin x$ en $a=\frac{\pi}{6}$ con la serie encontrada, halle una serie para $f(x)=\cos x$.

Tema 4 (12 puntos)

Dada $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ Determine:

a. Si la sucesión converge o no.
b. Encuentre los primeros 3 términos.
c. Si es monótona o no, y si lo es explique porqué.

Tema 5 (18 puntos)

a. Use el criterio del cociente (de la razón) para determinar si $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^n}$ converge.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1.

$$r = \frac{ed}{1 + eCos\theta} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + eCos\theta}\ (para\ semieje\ mayor = a)$$

$$r = \frac{186UA(1 - 0.9951^2)}{1 + 0.9951Cos\theta}$$

$$\boldsymbol{r = \frac{1.8183}{1 + 0.9951Cos\theta}}$$

Preihelio: r(0)

$$r(0) = \mathbf{0.9114UA}$$

Tema 2:

a)

$$N_1 =< -1,3,-2 >$$
$$N_2 =< 1,-2,3 >$$

Aplicando producto cruz para encontrar el vector de intersección.

$$L = N1 \times N2 =< 5,1,-1 >$$

Se encuentra otro punto de la línea en común igualando los planos en z=0

$$-x + 3y = 5$$
$$x - 2y = 1$$

Resolviendo matriz.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$
$$P = (13, 6, 0)$$

Obteniendo vector entre puntos:

$$V =< 16, 4, 0 >$$

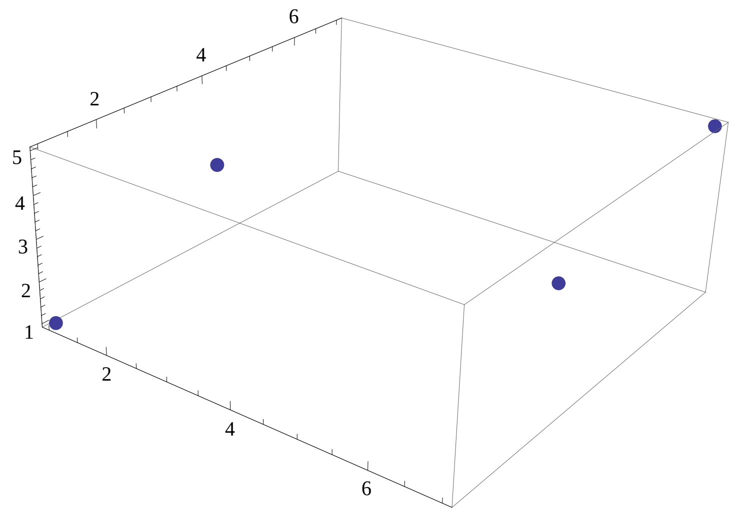
Encontrando el vector normal del plano.

$$N = L \times V =< 4, -16, 4 >$$
$$N =< 1, -4, 1 >$$

Ecuación del plano

$$\mathbf{1(x + 3) - 4(y - 2) + z = 0}$$
$$\boldsymbol{x - 4y + z = -11}$$

b)



Vectores:

$$V1_{AB} =< 1,2,3 >$$
$$V2_{AC} =< 5,4,1 >$$
$$V3_{CD} =< 1,2,3 >$$
$$V4_{BD} =< 5,4,1 >$$

Área

$$A = |V1 \times V2| = |< 1,-2,1 >| = \sqrt{\mathbf{6}}$$

---

c)

$$x = t, y = 2 - t, z = t + 1$$
$$x = 2s + 2, y = s + 3, z = 5s + 6$$

Igualar coordenadas x, y, z

$$t = 2s + 2$$
$$2 - t = s + 3$$
$$t + 1 = 5s + 6$$

Formando matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que la última fila se cancela formando 0's la solución a la matriz es única con valor de t=0
Valuamos t para encontrar el punto

$$\boldsymbol{x = 0}$$
$$\boldsymbol{y = 2}$$
$$\boldsymbol{z = 1}$$

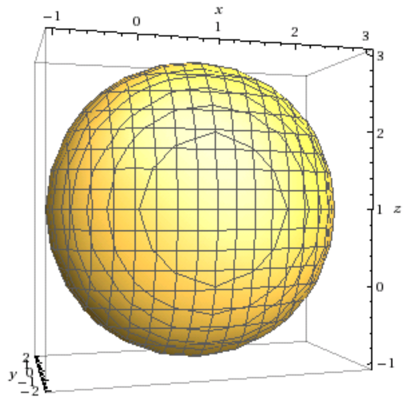
$$\boldsymbol{P = (0,2,1)}$$

---

d)

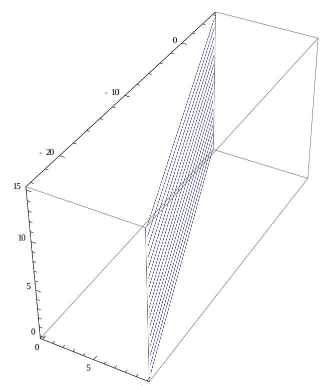
i. $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 2x + 2z$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 2 + 2$$
$$(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$$



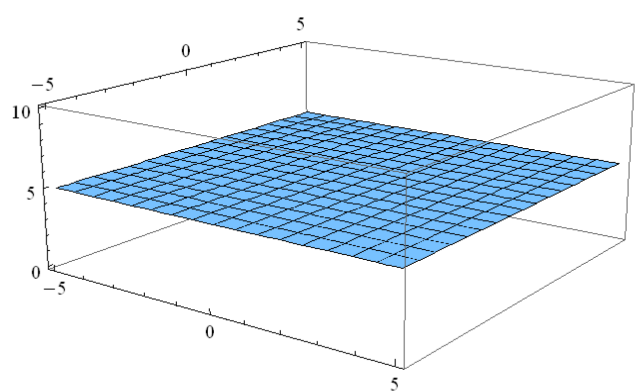
Esfera de radio 2 con centro en (1,0,1)

ii. $3x + y = 6$



Plano proyectado en z

iii. $z = 5$



Plano en z=5 proyectado hacia x y y

Tema 3

a.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x)^n = \frac{1}{1-x}$$

$$f(x) = x^4 \ln(1-x)$$

Integrando la función de la serie.

$$\int \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x)$$

$$\ln(1-x) = -\int \sum_{n=0}^{\infty}(x)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)^{n+1}}{n+1}$$

$$f(x) = x^4 \ln(1-x) = -x^4 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)^{n+1}}{n+1}$$

$$\boldsymbol{f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)^{n+5}}{n+1}}$$

---

b.

$$f(x) = Sin(x)\ centrada\ en\ a = \pi/6$$

0	$\mathrm{Sin}[x]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\mathrm{Cos}[x]$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}x}{2}$
2	$-\mathrm{Sin}[x]$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{x^2}{4}$
3	$-\mathrm{Cos}[x]$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{x^3}{4\sqrt{3}}$
4	$\mathrm{Sin}[x]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{x^4}{48}$
5	$\mathrm{Cos}[x]$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{x^5}{80\sqrt{3}}$
6	$-\mathrm{Sin}[x]$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{x^6}{1440}$

Se crea una serie compuesta de dos series individuales.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Derivando se encuentra el coseno

$$\boldsymbol{Cos(x) = f'(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}}$$
$$\boldsymbol{Cos(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}$$

Tema 4

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Si el límite converge, la sucesión es convergente.
Se puede trabajar un límite logaritmo por ser una función continua y creciente.

$$\lim_{n\to\infty}\ln(a_n) = \lim_{n\to\infty} n * \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n} \to \frac{0}{0}; L'Hôpital$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\Big/1+\frac{1}{n} * \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{d}{dn}(1/n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\ln(a_n) = 1$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = e^1 = e}$$

Primeros 3 términos

$$\{2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}\}$$

Para saber si es monótona hay que ver la tendencia de la serie:

$$\{2.0, 2.25, 2.37, 2.44, 2.49, 2.52, 2.54, 2.56, 2.58, 2.59\}$$

Es evidente que la serie crece constantemente hasta llegar al límite que es “e”

Es monótona por ser creciente en todo su recorrido

Tema 5:

a.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} * \frac{(2n+1)!}{(-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)}{(2n+3)!} * (2n+1)! \right| =$$

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)}{(2n+3)(2n+2)} \right| \to 0}$$

Converge

b.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n}$$

Prueba de la raíz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(x-4)^n}{3^n} \right|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x-4}{3} \right| \leq 1$$

$$-1 < \frac{x-4}{3} < 1$$

$$-3 < x-4 < 3$$

$$\boldsymbol{1 < x < 7}$$

Radio de convergencia = 3

c.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

es telescópica, separar por fracciones parciales.

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$$

$$1 = An + 2A + Bn$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2}{n} + \frac{-1/2}{n+2}$$

desarrollar los primero términos:

$$\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{6} \quad -\frac{1}{10}$$
$$\frac{1}{8} \quad -\frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{10} \quad -\frac{1}{14}$$

Se cancelan todos los términos excepto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = 3/4}$$

Converge