UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-107-2-M-2-00-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 1**
SEMESTRE:	**Segundo**
CÓDIGO DEL CURSO:	**107**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**Agosto del 2017**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Melvin Saúl Calel Otzoy**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Melvin Saúl Calel Otzoy**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS — **ESCUELA DE CIENCIAS**
FACULTAD DE INGENIERIA — **DEPARTAMENTO DE MATEMATICA**

MATEMATICA INTERMEDIA 1 — **SEGUNDO PARCIAL**

TEMARIO A

TEMA 1 (20 PUNTOS)

a) Determine si converge o diverge $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{sen\,x\,dx}{(\cos x+1)^{\frac{2}{5}}}$

b) Halle un valor aproximado de $\displaystyle\int_0^1 senx^2\ dx$ utilizando la regla de Simpson con n=4 (redondee a 3 cifras decimales).

TEMA 2 (10 PUNTOS)

Una compuerta en un canal de irrigación tiene la forma de un trapecio de 3 pies de ancho en el fondo, 5 pies de ancho en la parte superior y 2 pies de alto. Está colocada verticalmente en el canal y el agua llega hasta un pie de su parte superior. Plantee la integral de la fuerza hidrostática sobre la compuerta. (densidad de peso del agua 62.5 lb/pie^3).

TEMA 3 (9 PUNTOS)

Plantee las integrales necesarias para encontrar el centroide de la región limitada por las curvas $y=x^2 \quad ; \quad y=3x$

TEMA 4 (21 PUNTOS)

a) Determine si converge o diverge las siguientes series.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^n}$ Por serie alternante. **ii)** Por criterio de la integral $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^2+1}$

b) Encuentre la suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)}$

TEMA 5 (10 PUNTOS)

Escriba los dos siguientes términos de la sucesión, trace su gráfica. Escriba el n-ésimo término, determine si es monótona de que tipo, cotas, converge o diverge $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\right\}$.

TEMA 6 (30PUNTOS)

a) Represente $f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$ por medio de una serie de potencias, partiendo de la serie de potencias de la geométrica. Después utilizando la integral de la serie encontrada, halle la serie de $g(x)=\ln(2x+1)$. (10 puntos)

b) Encuentre la serie de Maclaurin de $f(x)=\cos x$ indicando todos los pasos. Utilizando la serie anterior y la derivada de series de potencias encuentre la serie de $g(x)=senx$, luego la serie de $h(x)=senx^2$ y halle $\displaystyle\int_0^1 senx^2 dx$ como una serie, por último encuentre una suma parcial de 3 términos de la serie de la integral. (10 puntos)

c) Halle el radio y el intervalo abierto de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{2n}}{9^n} \qquad \text{(10 puntos.)}$$

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema No. 1: 20 puntos

a) Determine si converge o diverge $\int_0^{\pi} \frac{sen\, x\, dx}{(\cos x+1)^{\frac{2}{5}}}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se plantea la integral como un límite ya que posee una discontinuidad en $x=\pi$, se realizan las sustituciones necesarias para deteminar si la integral converge o diverge.	$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(\cos x+1)^{2/5}}dx = \lim_{b\to\pi^-} -\int_0^b \frac{-\sin x}{(\cos x+1)^{2/5}}dx$ $Sea\text{:}\ \ u=\cos x+1 \qquad du=\sin x\, dx$ $= \lim_{b\to\pi^-} -\frac{5}{3}(\cos x+1)^{3/5}\Big\|_0^b$ $= -\frac{5}{3}\lim_{b\to\pi^-}(\cos b+1)^{3/5}+\frac{5}{3}(\cos 0+1)^{3/5}$ $=\frac{5}{3}\sqrt[5]{8}$ $Converge$

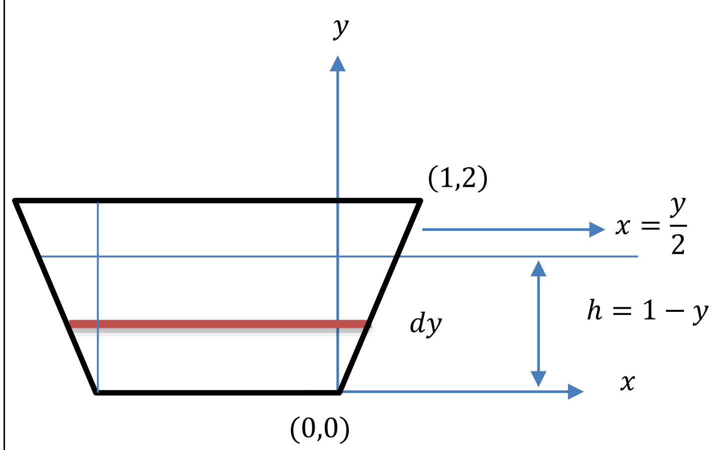
b) Halle un valor aproximado de $\int_0^1 senx^2\ dx$ utilizando la regla de Simpson con n=4 (redondee a 3 cifras decimales).

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se muestran en una tabla los valores a utilizar para aplicar la regla se Simpson. $Sea\text{:}\ a=0, b=1, n=4$ $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{4}=\frac{1}{4}$	(ver tabla)
2.	Se aplica la regla se Simpson para hallar el valor aproximado de la integral.	$\int_a^b f(x)dx \approx S_n$ $=\frac{\Delta x}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]$ $S_n=\frac{1/4}{3}[0+4(0.062)+2(0.247)+4(0.533)+0.841]$ $\int_0^1 \sin x^2 dx \approx S_n = 0.310$

n	x	x^2	$\sin x^2$
0	0	0	0
1	1/4	1/16	0.062
2	½	¼	0.247
3	¾	9/16	0.533
4	1	1	0.841

Tema No. 2: 10 puntos

Una compuerta en un canal de irrigación tiene la forma de un trapecio de 3 pies de ancho en el fondo, 5 pies de ancho en la parte superior y 2 pies de alto. Está colocada verticalmente en el canal y el agua llega hasta un pie de su parte superior. Plantee la integral de la fuerza hidrostática sobre la compuerta. (densidad de peso del agua 62.5 lb/pie^3).

<table>
<tr><th>No.</th><th>Explicación</th><th>Operatoria</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Se realiza un esquema de la compuerta, con la información proporcionada.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Se plantea la ecuación de la de uno de los lados de la compuerta, en el primer cuadrante.</td><td>

$$Sea \rightarrow (y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$Encontrando\ m:$$

$$(x_1, y_1) = (1,2)$$
$$(x_0, y_0) = (0,0)$$

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

$$Para \rightarrow P(0,0)$$

$$(y - 0) = 2(x - 0)$$

$$x = \frac{y}{2}$$

</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Se analiza la parte central de la compuerta de forma rectangular y seradamente la parte triangular de la compuerta para hallar la fuerza hidrostática total</td><td>

$$F = \rho g \int_a^b h(y) * x(y)\, dy$$

$$Parte\ Rectangular:$$
$$F_1 = 62.5 \int_0^1 (1 - y) * 3\, dy$$

$$Parte\ Triangular:$$

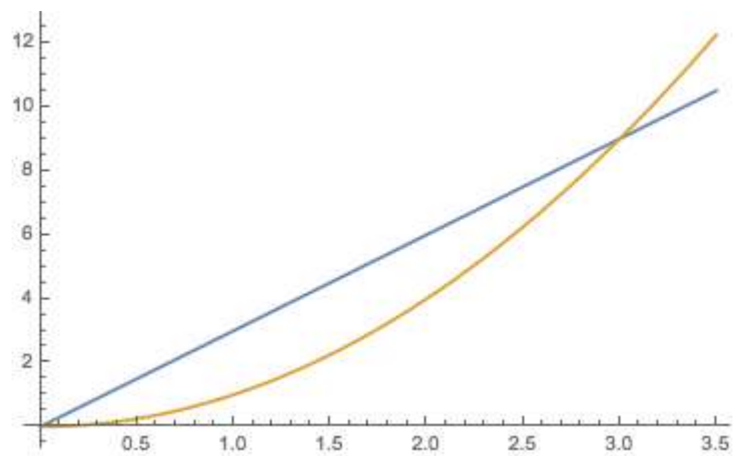
$$F_2 = 2 * 62.5 \int_0^1 (1 - y) * \frac{y}{2}\, dy$$

$$F_T = 62.5 \int_0^1 (1 - y) * 3\, dy + 2 * 62.5 \int_0^1 (1 - y) * \frac{y}{2}\, dy$$

</td></tr>
</table>

Tema No. 3: 9 puntos
Plantee las integrales necesarias para encontrar el centroide de la región limitada por las curvas

$$y = x^2 \quad ; \quad y = 3x$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se grafican las curvas en un plano, se encuentran los puntos de intersección.	$Gráfica$:  $Puntos\ de\ Intersección$: $x^2 = 3x$ $x = 0,\ \ x = 3$
2.	Se aplican las definiciones para el centroide de masa para platear las integrales necesarias. $\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$ $\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx$	$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ $a = 0,\ \ b = 3$ $Área\ entre\ curvas$: $A = \int_0^3 (3x - x^2)\, dx$ $Centroide\ \bar{x}$ $\bar{x} = \frac{\int_0^3 x(3x - x^2)\, dx}{\int_0^3 (3x - x^2)\, dx}$ $Centroide\ \bar{y}$ $\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^3 (3x + x^2)(3x - x^2)dx}{\int_0^3 (3x - x^2)\, dx}$

Tema No. 4: 21 puntos

a) Determine si converge o diverge las siguientes series.

i) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^n}$$ Por serie alternante.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se comprueba para la serie dada los criterios para la convergencia de la serie alternante. $b_{n+1} \leq b_n$ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$	$b_{n+1} \leq b_n$ $\frac{n+2}{2^{n+1}} \leq \frac{n+1}{2^n}$ $n+2 \leq 2(n+1)$ $n+2 \leq 2n+1$ $0 \leq n$ $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n \ln 2}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\infty} = 0$ $La\ Serie\ Converge$

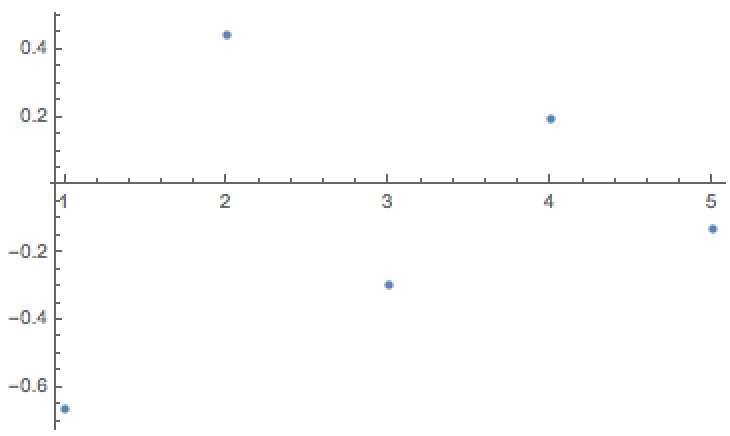
ii) Por criterio de la integral $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1} n}{n^2+1}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se comprueba para la serie dada el criterio de la integral. $a_n = f(n) \to f(x)$ $Si \int_1^{\infty} f(x)dx\ es\ convergente,$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ es\ convergente$	$a_n = \frac{\tan^{-1} n}{n^2+1}$ $f(x) = \frac{\tan^{-1} x}{x^2+1}$ $\int_1^{\infty}\frac{\tan^{-1} x}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{\tan^{-1} x}{x^2+1}dx$ $Sea\ u = \tan^{-1} x \quad du = \frac{1}{x^2+1}dx$ $= \lim_{b\to\infty}\frac{(\tan^{-1} x)^2}{2}\Big\vert_1^b$ $= \lim_{b\to\infty}\frac{(\tan^{-1} b)^2}{2} - \lim_{b\to\infty}\frac{(\tan^{-1} 1)^2}{2}$ $= \frac{(\pi/2)^2}{2} - \frac{(\pi/4)^2}{2}$ $= \frac{3\pi^2}{32}$ $La\ serie\ converge$

b) Encuentre la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se separa la sumatoria en fracciones parciales para hallar la suma de la serie telescópica.	$\frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3}$ $2 = A(n+3) + B(n+1)$ $A = 1$ $B = -1$
2.	Se encuentra la suma de la serie telescópica.	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n+2} + \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n+3}$ $= \frac{5}{6}$ $La\ serie\ converge$

Tema No. 5: 10 puntos
Escriba los dos siguientes términos de la sucesión, trace su gráfica. Escriba el n-ésimo término, determine si es monótona de que tipo, cotas, converge o diverge $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\right\}$.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se encuentra el término a_n de la sucesión para trazar su gráfica, encontrar los dos siguientes términos de la sucesión determinar sus cotas, monotomía y su convergencia.	$a_n = (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ $Términos\ de\ la\ sucesión:$ $a_1 = -\frac{2}{3}\quad a_2 = \frac{4}{9}\quad a_3 = -\frac{8}{27}\quad a_4 = \frac{16}{81}\quad a_5 = -\frac{32}{243}$ $Gráfica:$  $Cotas:$ $Cota\ inferior\ \rightarrow \frac{4}{9}$ $Cota\ superior\ \rightarrow\ -\frac{2}{3}$ $Monotomía:$ $a_1 < a_2 > a_3$ $No\ es\ monótoma$ $Convergencia:$ $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ $La\ sucesión\ converge$

Tema No. 6: 10 puntos

a) Represente $f(x)=\dfrac{1}{1+2x}$ por medio de una serie de potencias, partiendo de la serie de potencias de la geométrica. Después utilizando la integral de la serie encontrada, halle la serie de $g(x)=\ln(2x+1)$.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se manupila la expresión mostrada para llegar a la serie de potencias de $f(x)=\frac{1}{1+2x}$ $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$$	$$f(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$ $$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n$$
2.	Se sabe que: $$\int \frac{1}{1+2x}=\frac{1}{2}\ln\lvert 1+2x\rvert+C$$ Se integra la serie de potencias de $f(x)=\frac{1}{1+2x}$ para encontrar la serie de potencias de $g(x)=\ln\lvert 2x+1\rvert$	$$\int \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n x^{n+1}}{n+1}+C$$ $$\frac{1}{2}\ln\lvert 1+2x\rvert=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n x^{n+1}}{n+1}+C$$ $$Cuando\ x=0$$ $$\frac{1}{2}\ln\lvert 1\rvert=0+C\ \to C=0$$ $$g(x)=\ln\lvert 1+2x\rvert=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2)^{n+1}x^{n+1}}{n+1}$$

b) Encuentre la serie de Maclaurin de $f(x)=\cos x$ indicando todos los pasos. Utilizando la serie anterior y la derivada de series de potencias encuentre la serie de $g(x)=senx$, luego la serie de $h(x)=senx^2$ y halle $\int_0^1 senx^2dx$ como una serie, por último encuentre una suma parcial de 3 términos de la serie de la integral.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se encuentran las derivadas de la función $f(x)=\cos x$, se evalúan en $a=0$ para hallar la serie de Maclaurin de la misma. $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$	$f(x)=\cos x$ $\quad f(0)=1$ $f'(x)=-\sin x$ $\quad f'(0)=0$ $f''(x)=-\cos x$ $\quad f''^{(0)}=-1$ $f'''(x)=\sin x$ $\quad f'''(0)=0$ $f'^{v}(x)=-\cos x$ $\quad f'^{v}(0)=1$ $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

2.	Se realizan los arreglos algebraicos a la expresión encontrada para encontrar la serie de potencias de $h(x) = \sin x^2$	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ $\sin x = -\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right)$ $\sin x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n * 2n * x^{2n-1}}{(2n)!}$ $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} * x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * x^{4n+2}}{(2n+1)!}$ $\int_0^1 \sin x^2\, dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n * x^{4n+1}}{(2n+1)!} dx$ $\int_0^1 \sin x^2\, dx = \frac{(-1)^n * x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}\Big\|_0^1$ $\int_0^1 \sin x^2\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!}$
3.	Se encuentra la suma de los primeros tres términos de: $\int_0^1 \sin x^2\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!}$	$\int_0^1 \sin x^2\, dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320}$ $\int_0^1 \sin x^2\, dx \approx 0.3103$

c) Halle el radio y el intervalo abierto de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{2n}}{9^n}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica el criterio de la razón a la serie de potencias para hallar el radio y el intervalo abierto de convergencia de la misma. $Converge\ si:$ $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\|$	$Para \rightarrow a_n = \frac{(-1)^n (x-2)^{2n}}{9^n}$ $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{2n+2}}{9^{n+1}}}{\frac{(-1)^n(x-2)^{2n}}{9^n}}\right\|$ $= \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{(-1)(x-2)^2}{9}\right\|$ $Converge\ si:$ $\|(x-2)^2\| < 9$ $-3 < x-2 < 3$ $radio \rightarrow R = 3$ $Intervalo\ de\ convergencia \rightarrow -1 < x < 5$