UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO:	Matemática Intermedia 1
JORNADA:	Matutina
SEMESTRE:	1er. Semestre
AÑO:	2013
TIPO DE EXAMEN:	Tercer examen parcial
NOMBRE DE LA PERSONA QUE RESOLVIÓ EL EXAMEN:	Pablo Aldana
NOMBRE DE LA PERSONA QUE REVISÓ EL EXAMEN:	Inga. Vera Marroquín

Jornada Matutina **Temario A**

Tema 1(20 puntos)

a) Plantee una integral para determinar el área de la región localizada dentro de ambas curvas.

$r^2 = 9\cos 2\theta$, $r^2 = 4\,\mathrm{sen}\,2\theta$

b) Dada la ecuación:

$$r = \frac{4}{2 + \mathrm{sen}\,\theta}$$

- Encuentre la excentricidad
- Identifique la cónica
- Dé la ecuación de la directriz
- Grafique la cónica indicando sus partes más importantes.
-

Tema 2 (10 puntos)

a) Calcule los primeros cinco términos de la sucesión

$$a_n = \frac{4n-1}{n}$$

y grafíquelos.

b) Determine si la sucesión es creciente, decreciente, o no es monótona. ¿Si la sucesión está acotada, determine sus cotas?

Tema 3 (15 puntos)

a) Determine el radio de convergencia y el Intervalo abierto de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n5^n}$$

(8 puntos)

b) Determine si la serie geométrica es convergente o divergente. Si converge, calcule su suma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^n}$$

(7 puntos)

Tema 3 (20 puntos)

a) Mediante la prueba de la integral determine si la serie converge o diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

(5 puntos)

b) Encuentre una serie de Maclaurin para $f(x) = cosx$.
Utilizando la serie de potencias encontrada, obtenga un valor aproximado de la integral definida.

$$\int_0^{\pi/2} x\cos\sqrt{x}\,dx$$

(con tres decimales exactos)

(15 puntos)

Tema 4 (15 puntos)

a) Grafique el paralelogramo en R^3 luego encuentre el área del paralelogramo con vértices:
$A(2,-1,1)B(5,1,4)C(0,1,1)D(3,3,4)$ ***(9 puntos)***

b) Encuentre los ángulos internos del triángulo formado por los puntos
$A(2,-1,0)B(4,1,1)C(4,-5,4)$ ***(6 puntos)***

Tema 5 (20 puntos)

a) Determine si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, oblicuas o se cortan. Si se intersectan, determine el punto de Intersección.

L_1: $x = -2t + 1, \quad y = t + 4, \quad z = t$

L_2: $x = -3s + 2, \quad y = 4s + 1, \quad z = -s + 2$

b) Encuentre la ecuación del plano que contiene a las rectas que se intersectan.

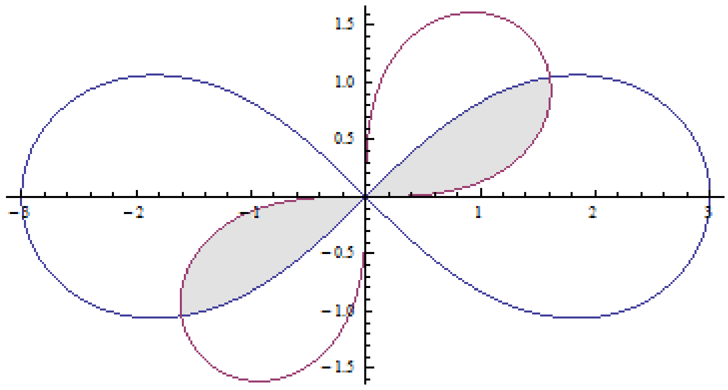
L_1: $x = 4t + 2, \quad y = 3, \quad z = -t + 1$

L_2: $x = 2s + 2, \quad y = 2s + 3, \quad z = s + 1$

Tema 1:

a)

$$r_1^2 = 9Cos(2\theta)$$
$$r_2^2 = 4Sen(2\theta)$$



Igualando funciones:

$$r_1^2 = r_2^2$$
$$9Cos(2\theta) = 4Sen(2\theta)$$
$$\frac{9}{4} = Tan(2\theta)$$
$$2\theta = Tan^{-1}\left(\frac{9}{4}\right)$$
$$\theta = 0.576286$$

Integrando de los límites correspondientes (se multiplica por 2 dado que son 2 hojas idénticas reflejadas)

$$\boldsymbol{A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{0.5763} 4Sen(2\theta) + \frac{1}{2}\int_{0.5763}^{\frac{\pi}{4}} 9Cos(2\theta)\right)}$$

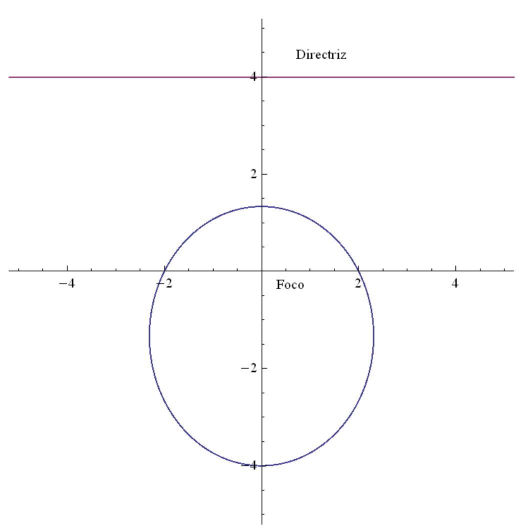
b)

$$r = \frac{4}{2 + Sen\theta}$$

$$r = \frac{4}{2 + Sen\theta} * \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{4 * \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}Sen\theta}$$

$$r = \frac{ed}{1 \pm eSen\theta}$$

- $\boldsymbol{e = \frac{1}{2}}$
- $\boldsymbol{Cónica: elipse}$
- $\boldsymbol{d = 4}$



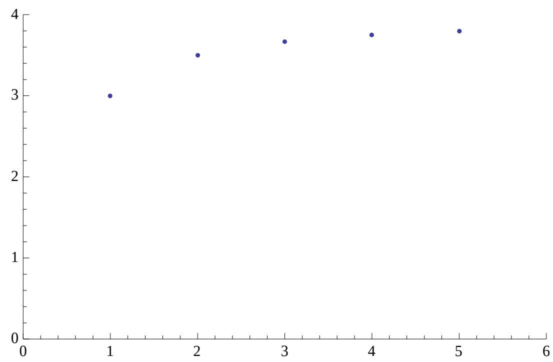
-

Tema 2:

$$a_n = \frac{4n-1}{n}$$

Se sustituye n para obtener los términos de la sucesión y luego se grafican sobre el plano para ver su comportamiento.

$$a_1 = 3; a_2 = \frac{7}{2}; a_3 = \frac{11}{3}; a_4 = \frac{15}{4}; a_5 = \frac{19}{5}$$



Es una sucesión creciente, evidentemente acotada por arriba por 4 y acotada por abajo por 3.

Tema 3:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n\,5^n}$$

Aplicando el criterio de la razón.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}(x-5)^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} * \frac{n\,5^n}{(-1)^{n+1}(x-5)^n} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)(x-5)n}{(n+1)5} \right| = \frac{|x-5|}{5} * \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{|x-5|}{5} * \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$$\frac{|x-5|}{5} < 1$$

$$-1 < \frac{|x-5|}{5} < 1$$

$$-5 < x-5 < 5$$

$$0 < x < 10$$

$$\boldsymbol{(0, 10); R = 5}$$

b)

Se debe modificar la expresión para que se asemeje a una serie geométrica.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} * \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$r = \frac{2}{3} < 1; \boldsymbol{Converge}$$

$$S = \frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{8}{3-2} = 8$$

Converge; S=8

Tema 3

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \left. \frac{n^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right|_1^{\infty} \rightarrow \boldsymbol{Diverge}$$

b)

$$f(x) = Cos(x)$$

Serie de McLauring para el Cos(x):

0	$f[x]$	$\mathrm{Cos}[x]$	$f[0]$	1	1
1	$f'[x]$	$-\mathrm{Sin}[x]$	$f'[0]$	0	0
2	$f''[x]$	$-\mathrm{Cos}[x]$	$f''[0]$	-1	$-\frac{x^2}{2}$
3	$f^{(3)}[x]$	$\mathrm{Sin}[x]$	$f^{(3)}[0]$	0	0
4	$f^{(4)}[x]$	$\mathrm{Cos}[x]$	$f^{(4)}[0]$	1	$\frac{x^4}{24}$

$$Cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$Si\ Cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}; entonces\ Cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n}}{(2n)!}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xCos\left(\sqrt{x}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(2n)!} dx = \left. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{(n+2)(2n)!} \right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}}{(n+2)(2n)!} - \frac{(-1)^n (0)^{n+2}}{(n+2)(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}}{(n+2)(2n)!}$$

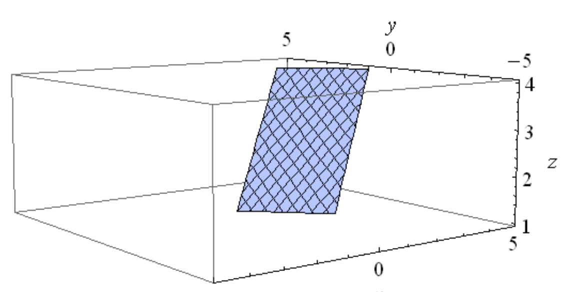
Se evalúan los primeros 5 términos y se evidencia que luego del 5to término hay 3 decimales iguales.

0	1.23	1.23
1.0	−0.646	0.588
2.0	0.0634	0.651
3.0	−0.00265	0.648
4.0	0.0000621	0.649
5.0	-9.29×10^{-7}	0.649

$$\boldsymbol{\int_0^{\frac{\pi}{2}} xCos\left(\sqrt{x}\right)dx = 0.649}$$

Tema 4:

a)



Definir vectores

$$AB =< 3,2,3 >$$
$$AC =< -2,2,0 >$$

El área es la magnitud del producto cruz de los vectores.

$$AB \times AC = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & j & k \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6i - 6j + 10k$$
$$Area = |AB \times AC| = \sqrt{36 + 36 + 100} = \mathbf{2\sqrt{43}}$$

$$\boldsymbol{Area = 2\sqrt{43}}$$

b)

Definir los vectores del triángulo

$$AB = < 2,2,1 >$$
$$AC =< 2, -4,4 >$$
$$BC =< 0, -6,3 >$$

Los cosenos directores de 2 vectores con el mismo origen indican el ángulo entre ellos.

$$Cos(\alpha) = \frac{AB \cdot AC}{|AB||AC|} = \frac{4 - 8 + 4}{|AB||AC|} = 0$$

$$\alpha = Cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$
$$BA = -AB$$

$$Cos(\beta) = \frac{BA \cdot BC}{|BA||BC|} = \frac{0 + 12 - 3}{\sqrt{4 + 4 + 1} + \sqrt{0 + 36 + 9}} = \frac{9}{3 * 3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\beta = Cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 1.1071$$

Para obtener el último ángulo se utiliza la suposición que los 3 ángulos de un triángulo suman pi.

$$\gamma = \pi - \alpha - \beta = \pi - \frac{\pi}{2} - 1.1071 = 0.4636$$

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2}; \ \beta = 1.1071; \gamma = 0.4636}$$

Tema 5:

a)

Vectores de las rectas

$$v_1 =< -2,1,1 >$$
$$v_2 =< -3,4, -1 >$$

$$v_1 \neq v_2; No\ son\ paralelas$$

Igualación de ecuaciones de recta para x, y, z.

$$-2t + 1 = -3s + 2$$
$$t + 4 = 4s + 1$$
$$t = -s + 2$$

$$-2t + 3s = 1$$
$$t - 4s = -3$$
$$t + s = 2$$

Resolviendo sistema por matrices

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2s = -1 \rightarrow s = -\tfrac{1}{2}$$

$$7s = 4 \rightarrow s = \frac{4}{7}$$

No puede haber 2 valores de s por lo tanto no existe un punto en común entre ambas rectas. Sumado al hecho que no son paralelas, se concluye que las rectas son oblicuas.

b)

Vectores de las rectas.

$$v_1 =< 4,0,-1 >$$
$$v_2 =< 2,2,1 >$$

$$Si\ se\ hace\ t = 0\ y\ s = 0\ se\ obtiene\ un\ punto\ de\ intersección\ en:$$
$$(2,3,1)$$

El vector normal es paralelo al producto cruz de las rectas.

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2i - 6j + 8k = N$$

Sustituyendo el vector normal y el punto en común para la ecuación de un plano

$$6(x-2) + (-6)(y-3) + (8)(z-1) = 0$$
$$\mathbf{2x - 6y + 8z = -6}$$