UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-107-2-M-1-00-2016_sF_09

CURSO:	**Matemática Intermedia 1**
SEMESTRE:	**Primero**
CÓDIGO DEL CURSO:	**107**
TIPO DE EXAMEN:	**Segundo Parcial**
FECHA DE EXAMEN:	**30 de marzo del 2016**
RESOLVIÓ EL EXAMEN:	**Melvin Saúl Calel Otzoy**
REVISÓ EL EXAMEN:	**Inga. Vera Marroquín**
DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Melvin Saúl Calel Otzoy**
COORDINADOR:	**Ing. José Alfredo González Díaz**

Universidad de San Carlos de Guatemala **Departamento de Matemática**
Facultad de Ingeniería **Matemática Básica 1**

30 de marzo de 2016 **Segundo Parcial** **Temario A**

Tema No. 1 (15 puntos)

a) Plantee una integral para calcular la longitud de arco de $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$, luego: (5 pts)

b) Utilice el método de Simpson con n=6 para calcular su valor, realice sus cálculos con 4 decimales. (10 pts)

Tema No. 2 (20 puntos)

Dada las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = 2\cos t \;\; \& \;\; y(t) = 3\,\mathrm{sen}\, t \quad 0 \leq t \leq \pi/2$$

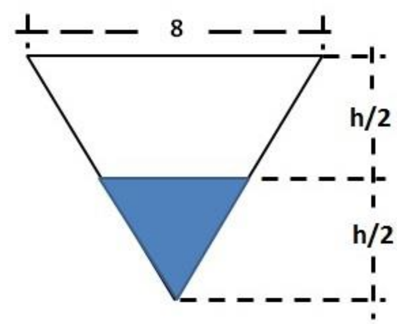
a) Hacer la gráfica en el intervalo establecido y colocar el direccionamiento del recorrido. (5 pts)

b) Plantear el área superficial en paramétricas si se hace girar alrededor del eje “y”. (10 pts)

c) Eliminar el parámetro y escribirla en forma cartesiana. (5 pts)

Tema No 3 (20 puntos)

Una pileta se llena a la mitad de su altura con un líquido de densidad 840 kg/m^3. Los extremos de la pileta son triángulos equiláteros invertidos con lados de 8 m. y vértice en la parte de abajo. Determine la fuerza hidrostática en un extremo de la pileta (véase la figura).



Tema No. 4 (15 puntos)

Calcule las siguientes integrales:

a) (8 puntos)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

b) (7 puntos)

$$\int_0^{2} \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

Tema No. 5 (20 puntos)

Grafique las curvas $\boldsymbol{r = 1}$ y $\boldsymbol{r = 2cos\ 3\theta}$, luego calcule el área de intersección.

Tema No. 6 (10 puntos)

La órbita de Marte alrededor del sol es una elipse con excentricidad 0.093 y semieje mayor de 2.28 x 10^8 km. Encuentre una ecuación polar para la órbita y luego trace la gráfica, indicando centro, eje mayor y eje menor.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Tema 1: 15 puntos

a) Plantee una integral para calcular la longitud de arco de $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se aplica la definición de longitud de arco: $$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$	$a = 0$ $b = 1$ $\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x$
2.	Se sustituyen los datos en la definición.	$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx$

R./

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx$$

b) Utilice el método de Simpson con n=6 para calcular su valor, realice sus cálculos con 4 decimales.

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se aplica la definición del método de Simpson: $\int_a^b f(x)\, dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}\begin{bmatrix} f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) \\ +4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) \\ +4f(x_{n-1}) + f(x_n) \end{bmatrix}$ $\Delta x = \frac{b-a}{n}$	$\Delta x = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$ $f(x) = \sqrt{1 + (2x)^2}$

2.	Se sustituye desde $x_0 = 0/6$, $x_1 = 1/6$, $x_2 = 2/6$, $x_3 = 3/6$, $x_4 = 4/6$, $x_5 = 5/6$ y $x_6 = 6/6$ en la definición, con 4 decimales. $$f(x) = \sqrt{1 + (2x)^2}$$ Luego se aplica la fórmula para el método de Simpson.	$S_6 = \frac{1/6}{3}\begin{bmatrix} 1.0000 + 4(1.0541) + 2(1.2019) \\ +4(1.4142) + 2(1.6666) \\ +4(1.9437) + 2.2361 \end{bmatrix}$ $$S_6 = 1.4789$$

R./

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx \approx S_6 = 1.4789$$

Tema 2: 20 puntos.

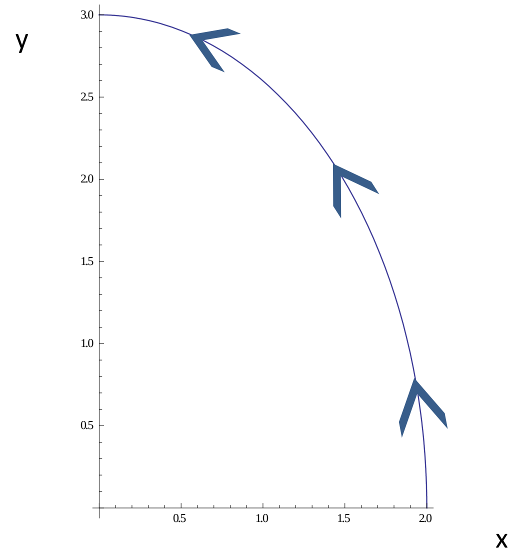
Dada las siguientes ecuaciones paramétricas:

$x(t) = 2\cos t$ & $y(t) = 3\,\mathrm{sen}\,t \quad 0 \le t \le \pi/2$

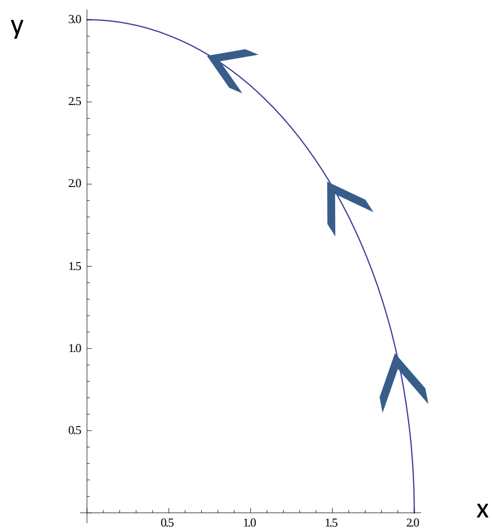
a) Hacer la gráfica en el intervalo establecido y colocar el direccionamiento del recorrido.

No	**Explicación**	**Operatoria**
1.	Se sustituye el valor del parámetro en ambas ecuaciones, para $t = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$ en una tabla para hallar los puntos de la gráfica (x, y).	(tabla abajo)

t	0	π/6	π/3	π/2
x	2	1.7	1	0
y	0	1.5	2.6	3

2.	Con los puntos obtenidos se traza la gráfica, en el eje x, los valores son descendentes desde 2 a 0, en el eje y, los valores son ascendentes desde 0 a 2, por lo tanto, la dirección del recorrido es en contra de las agujas del reloj.	

R./
Gráfica:



b) Plantear el área superficial en paramétricas si se hace girar alrededor del eje “y

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se aplica la definición del área de una superficie de revolución respecto al eje "x". $$S=\int_a^b 2\pi x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$	$a=0$ $b=\frac{\pi}{2}$ $\frac{dx}{dt}=\frac{d(2\cos(t))}{dt}$ $\frac{dx}{dt}=-2\,sen(t)$ $\frac{dy}{dt}=\frac{d(3\,\mathrm{sen}(t))}{dt}$ $\frac{dy}{dt}=3\,cos(t)$
2.	Se sustituyen los datos en la definición.	$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi(2\cos(t)\sqrt{\left(-2\,sen(t)\right)^2+(3\cos(t))^2}\,dt$$

R./

$$S=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\sqrt{4sen^2(t)+4cos^2(t)}\,dt$$

c) Eliminar el parámetro y escribirla en forma cartesiana.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Las ecuaciones están en términos de $\cos(t)$ y $sen(t)$, planteamos la identidad trigonométrica: $$sen^2(t)+cos^2(t)=1$$ Despejamos $\cos(t)$ y $sen(t)$ de las ecuaciones paramétricas.	$\frac{x}{2}=\cos(t)$ $\frac{y}{3}=sen(t)$

2.	Se sustituyen los datos en la identidad para eliminar el parámetro.	$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1$

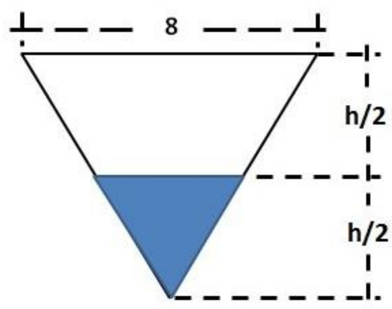
R./

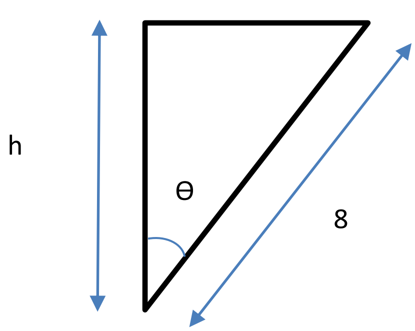
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

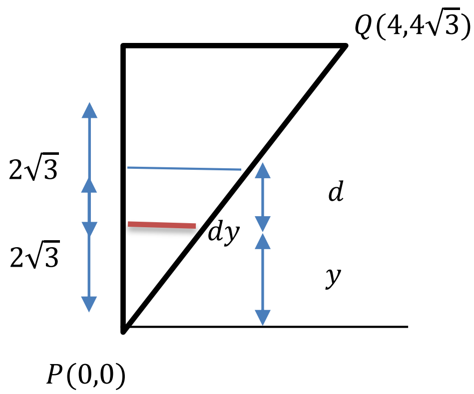
$$0\le x\le 2$$
$$0\le y\le 3$$

Tema 3: 20 puntos

Una pileta se llena a la mitad de su altura con un líquido de densidad 840 kg/m^3. Los extremos de la pileta son triángulos equiláteros invertidos con lados de 8 m. y vértice en la parte de abajo. Determine la fuerza hidrostática en un extremo de la pileta.



No.	Explicación	Operatoria
1.	Para encontrar el valor de la altura "h", se divide la pileta por la mitad para el análisis. 	Para el triángulo rectángulo representado en la figura: $\cos\theta=\frac{h}{8}$

2.	El triángulo es equilátero, por lo tanto en cada vértice el ángulo es 60^o Como se tomó la mitad del triángulo, $\theta = 30^o$	$h = 8\cos\theta = 8\ \cos 30^o = 8\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $h = 4\sqrt{3}$
3.	Se analiza el esquema anterior para encontrar la ecuación que describe el lado de la pileta, también para hacer el análisis de la presión del fluido.  	Para la recta P-Q: $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{4\sqrt{3} - 0}{4 - 0} = \sqrt{3}$ Sustituyendo en la ecuación de la recta, utilizando el punto P. $y - y_0 = m(x - x_0)$ $y - 0 = \sqrt{3}(x - 0)$ $y = \sqrt{3} * x$ Despejando x: $x = \dfrac{y}{\sqrt{3}}$ Para la presión del fluido, se tiene la ecuación: $P = \rho g d$ Del esquema puede notarse que: $d = 2\sqrt{3} - y$
4.	La fuerza hidrostática se obtiene sumando las fuerzas sobre todas las secciones de "x", a lo largo de toda la profundidad, integrando a lo largo de la profundidad del agua en la pileta.	$F = \int_0^{2\sqrt{3}} d * x * dy$ $F = \int_0^{2\sqrt{3}} \rho g(2\sqrt{3} - y)(x)dy$ Sustituyendo $x = y/\sqrt{3}$ $F = \int_0^{2\sqrt{3}} \rho g(2\sqrt{3} - y)\left(\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)dy$

5.	Ya que se tomó la mitad de la pileta para el análisis, la fuerza total sobre la pileta, por simetría es dos veces la expresión planteada en el inciso anterior.	$F = 2\int_0^{2\sqrt{3}} \rho g(2\sqrt{3} - y)\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) dy$
6.	Se procede con la integración, utilizando el teorema fundamental del cálculo para hallar el valor de la fuerza hidrostática.	$F = 2\rho g \int_0^{2\sqrt{3}} \left(2y - \frac{y^2}{\sqrt{3}}\right) dy$

R./

$$F = 65856\ N$$

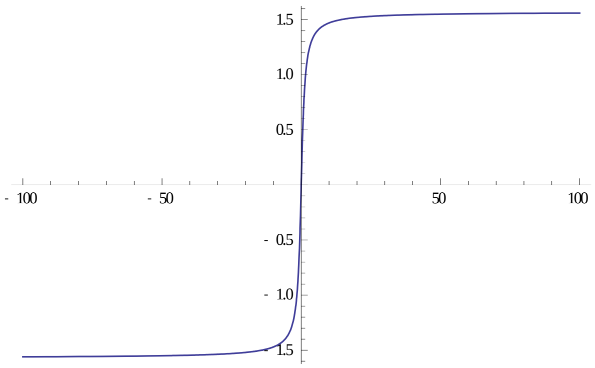
Tema 4: 15 puntos.

Calcule las siguientes integrales:

a)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 1} dx$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Se plantea la integral impropia como un límite, sustituyendo ∞ por el parámetro a, para evaluar la integral mediante el teorema fundamental del cálculo.	$\lim_{a\to+\infty} \int_0^a \frac{dx}{x^2+1}$
2.	La integral, corresponde a $\tan^{-1} x$, se procede a evaluar el límite, con la integral resuelta.	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to+\infty} \tan^{-1} a - \lim_{a\to+\infty} \tan^{-1} 0$ $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to+\infty} \tan^{-1} a$

3.	Con la gráfica de $\tan^{-1} x$, se determina el valor al que el límite tiende.  La gráfica muestra la función graficada en el intervalo $(-100,100)$, la asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ está situada en $\pi/2$	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a \to +\infty} \tan^{-1} a = \frac{\pi}{2}$

R./

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = = \frac{\pi}{2}$$

b)

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

No.	**Explicación**	**Operatoria**
1.	El término $(x-1)$ se hace cero cuando $x=1$, haciendo que la expresión a integrar sea indefinida en ese valor, es decir: $\frac{1}{0}$ Es necesario expresar la integral como un límite, en dos partes, la primera cuando $x \to 1^-$ y la segunda cuando $x \to 1^+$. Se sustituye 1^- y 1^+ por los parámetros a y b para evaluar la integral mediante el teorema fundamental del cálculo.	$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{a \to 1^-} \int_0^a \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{a \to 1^+} \int_b^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ $\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}$
2.	Se evalúa la integral en los parámetros para determinar el valor de la misma en los límites.	$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{a \to 1^-} \left(-\frac{1}{a-1} - 1\right) + \lim_{b \to 1^+} \left(-1 + \frac{1}{b-1}\right)$
3.	Para el término $\frac{1}{a-1}$, $a \to 1$ por la izquierda, por lo tanto el término tiende a $-\infty$.	$\lim_{a \to 1^-} \left(-\frac{1}{a-1} - 1\right) = +\infty$

4.	Para el término $\frac{1}{b-1}$, $b \to 1$ por la derecha, por lo tanto el término tiende a $+\infty$.	$$\lim_{b\to 1^+}\left(-1+\frac{1}{b-1}\right)=+\infty$$
5.	Sumando las respuestas anteriores se obtiene el valor de la integral, la cual es divergente.	$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}=+\infty+\infty$$

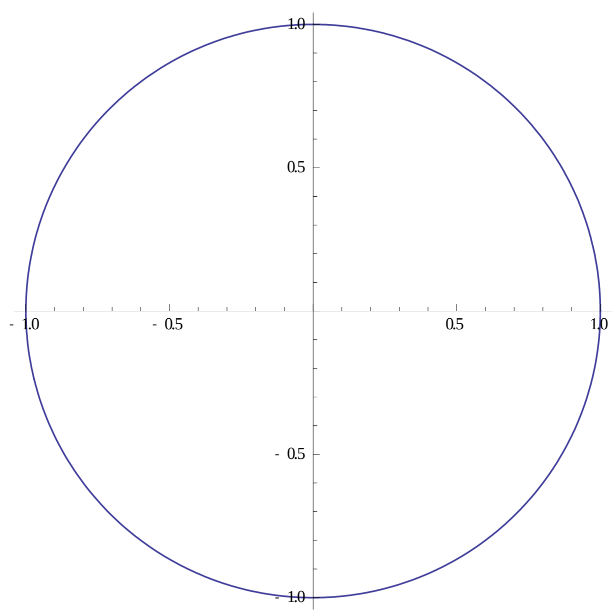
R./

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}=+\infty$$

$$Divergente$$

Tema 5: 20 puntos

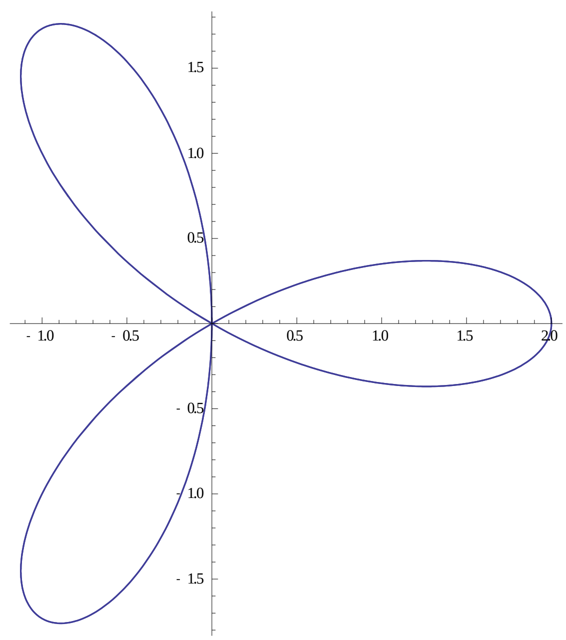
Grafique las curvas $\boldsymbol{r=1}$ y $\boldsymbol{r=2cos\ 3\theta}$, luego calcule el área de intersección.

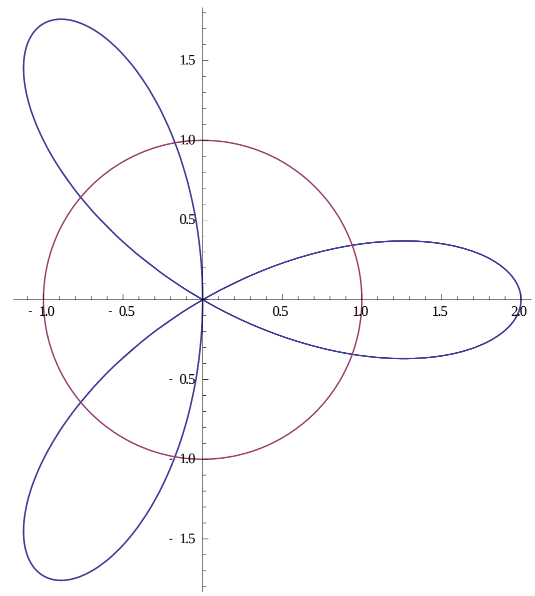
No	Explicación	Operatoria
1	La gráfica de la curva $r=1$ corresponde a un círculo de radio = 1 en el eje de coordenadas polares.	

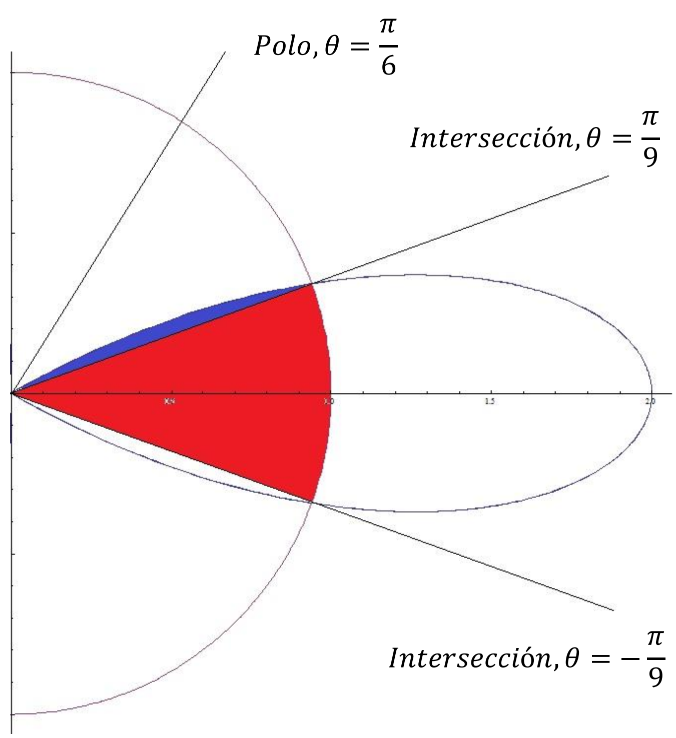
2. Para la gráfica de la curva $r = 2\cos 3\theta$, se evalúa la función en valores contenidos en $0 \leq \theta \leq \pi$, ya que las curvas con n impar, es decir 3θ, se generan 2 veces en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{r = 2\cos 3\theta}$
$\pi/9$	1
$2\pi/9$	-1
$\pi/3$	-2
$4\pi/9$	-1
$5\pi/9$	1
$2\pi/3$	2
$7\pi/9$	1
$8\pi/9$	-1
π	-2

3. Gráfica de $r = 2\cos 3\theta$



4.	Gráfica de $r = 2\cos 3\theta$ y $r = 1$	
5.	Se encuentran los polos de la curva $r = 2\cos 3\theta$, para determinar los límites de las integrales para el área de intersección.	Polos en $r = 0$, para $0 \leq \theta \leq \pi$: $r = 2\cos 3\theta = 0$ $3\theta = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} \pm \pi n$ $3\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$ $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

6.	Se determinan los puntos de intersección igualando ambas ecuaciones de las curvas.	Para $0 \leq \theta \leq \pi$: $$\mathrm{r} = \mathrm{r}$$ $$2\cos 3\theta = 1$$ $$3\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$ $$3\theta = \frac{\pi}{3} \pm \pi n$$ $$3\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{16\pi}{3}$$ $$\theta = \frac{\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}$$ Los ángulos de intersección tomados corresponden a los contenidos en la hoja de la rosa, sobre $\theta = 0$
7.	La gráfica muestra dos rectas en los ángulos $\theta = \frac{\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}$, que son los puntos de intersección. Es decir: $\theta = \frac{\pi}{9}, -\frac{\pi}{9}$ La gráfica $r = 1$ está representada en $-\frac{\pi}{9} \leq \theta \leq \frac{\pi}{9}$, sombreada con color rojo, el área total representada por esta ecuación es el área sombreada multiplicada tres veces. La gráfica $r = 2\cos 3\theta$ está representada en $\frac{\pi}{9} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, sombreada con color azul, el área total representada por esta ecuación es el área sombrada multiplicada seis veces. Las consideraciones anteriores se toman para encontrar el área de intersección por simetría.	

8.	Se aplica la definición del área de una curva para ambos casos considerados en el inciso anterior. $$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_f} f(\theta)^2 d\theta$$	$$A = 3\left(\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} 1^2 d\theta\right) + 6\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 3\theta)^2 d\theta\right)$$

R./

$$A = \frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} 1^2 d\theta + 3\int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 3\theta)^2 d\theta \approx 1.23u^2$$

Tema 6: 10 puntos

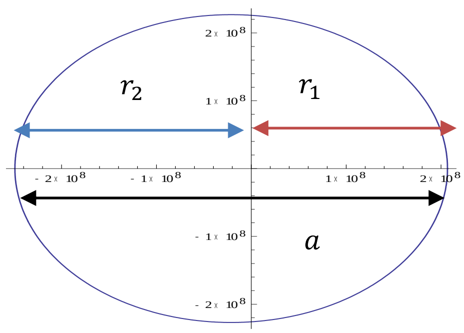
La órbita de Marte alrededor del sol es una elipse con excentricidad 0.093 y semieje mayor de 2.28×10^8 km. Encuentre una ecuación polar para la órbita y luego trace la gráfica, indicando centro, eje mayor y eje menor.

No	EXPLICACION	OPERATORIA
1.	Se plantea la ecuación polar, y se sustituyen los datos. $$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta}$$ Como $e = 0.93 < 1$, la ecuación corresponde a una elipse.	$$r = \frac{0.093d}{1 + 0.093\cos\theta}$$

2.

Se evalúa la ecuación para los ángulos $\theta = 0, \pi$ para encontrar los valores de r_1, r_2, que sumados son el valor del semieje mayor $a = 2.28 * 10^8 km$.

Esto para hallar el valor de d.



Para $\theta = 0$

$$r_1 = \frac{0.093d}{1 + 0.093 \cos 0}$$

$$r_1 = \frac{0.093d}{1.093}$$

Para $\theta = \pi$

$$r_2 = \frac{0.093d}{1 + 0.093 \cos \pi}$$

$$r_1 = \frac{0.093d}{0.907}$$

De la gráfica:

$$r_1 + r_2 = a$$

$$\frac{0.093d}{1.093} + \frac{0.093d}{0.907} = a$$

Despejando d:

$$d = 10.6597a = 2.43 * 10^9$$

3.	Sustituyendo los valores para la ecuación polar:	$r = \dfrac{2.26 * 10^8}{1 + 0.093\cos\theta}$

R./

$$Ecuación\ polar\ para\ la\ Órbita:$$

$$r = \frac{2.26 * 10^8}{1 + 0.093\cos\theta}$$

$$Gráfica:$$