UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CLAVE-107-3-M-2-12-2017

CURSO:	**Matemática Intermedia 1**
SEMESTRE:	**Vacaciones de Diciembre**
CÓDIGO DEL CURSO:	**107**
TIPO DE EXAMEN:	**Tercer Examen Parcial**
FECHA DE REALIZACIÓN:	**21 de mayo de 2018**
RESOLVIÓ Y DIGITALIZÓ EL EXAMEN:	**Rodolfo Guzmán Cermeño**

Universidad de San Carlos de Guatemala	Departamento de Matemática
Facultad de Ingeniería	Matemática Intermedia 1
Escuela Técnica CV Diciembre 2017	Tercer Examen Parcial

TEMARIO "A"

TEMA 1 (10 Pts.) Indique si la sucesión converge o diverge. $$a_n = \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n$$	**TEMA 2 (10 Pts.)** Utilice la prueba de la integral para determinar si la serie converge o no. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k+1)^{\frac{3}{2}}}$$
TEMA 3 (15 Pts.) Encuentre el intervalo abierto y el radio de convergencia de $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2(x+7)^k}{3^{2k}}$$	**TEMA 4 (10 Pts.)** Determine si la serie converge o diverge. Si converge determine la suma. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+11k+30}$$

TEMA 5 (10 Pts.)

Elimine los parámetros del conjunto de ecuaciones paramétricas y obtenga una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica. Luego trace la gráfica de la ecuación. $x(t) = -e^t;\ y(t) = e^{-t}$

TEMA 6 (10 Pts.)

Una curva C tiene ecuaciones paramétricas $x(t) = 2t - 5$ y $y(t) = t^2 - 4t + 3$. Encuentre una ecuación de la recta tangente a C que es paralela a $y = 3x + 1$.

TEMA 7 (10 Pts.)

Encuentre la longitud de la curva $x(t) = e^t sent;$ $y(t) = -e^t cost;\ \ y\ \ 0 \le t \le \pi$

TEMA 8 (25 Pts.)

Determine el área de la región dentro del círculo $\mathrm{r} = 5$ y fuera de la limacón $\mathrm{r} = 3 - \mathrm{sen}\boldsymbol{\theta}$.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN

Índice

Tema 1

TEMA 1 (10 Pts.)
Indique si la sucesión converge o diverge.

$$a_n = \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Calcular el límite L.	$L = \lim_{n\to\infty} a_n$
2.		$L = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n$
3.	Aplicar logaritmo natural.	$\ln L = \ln\left[\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n\right]$
4.	La función de un límite es igual al límite de la función. Si la función es continua.	$\ln L = \lim_{n\to\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{5}{n}\right)^n\right]$
5.	Aplicar leyes de logaritmos.	$\ln L = \lim_{n\to\infty} \left[n \cdot \ln\left(1 - \frac{5}{n}\right)\right]$
6.	El límite tiende a una forma indeterminada.	$\ln L \to \infty \cdot 0$
7.	Reescribir como cociente para aplicar l'Hôpital.	$\ln L = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\ln\left(1 - \frac{5}{n}\right)}{n^{-1}}\right]$
8.	Derivar numerador y denominador.	$\ln L = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\left(1 - \frac{5}{n}\right)^{-1}\left(\frac{5}{n^2}\right)}{-n^{-2}}\right]$

9.	Simplificar.	$\ln L = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{-5n}{n-5}\right]$
10.	Aplicar l'Hôpital.	$\ln L = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{-5}{1}\right]$
11.	$\ln L$ converge a -5	$\ln L \to -5$
12.	El límite converge a e^{-5}	$L \to e^{-5}$

La sucesión converge.

Tema 2

TEMA 2 (10 Pts.)
Utilice la prueba de la integral para determinar si la serie converge o no.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k+1)^{\frac{3}{2}}}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Aplicar integral.	$\lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{dk}{(4k+1)^{3/2}}$
2.	Sustituir: $4k+1=u$ $4dk=du$ $4(n)+1=u_b$ $4(1)+1=u_a$	$\lim_{n\to\infty} \int_{u_a}^{u_b} \frac{\frac{1}{4}du}{u^{3/2}}$
3.	Integrar.	$\frac{1}{4}\cdot \lim_{n\to\infty} \left[-2\cdot u^{-\frac{1}{2}}\right]_{u_a}^{u_b}$
4.	Regresar a variable original.	$\frac{1}{4}\cdot \lim_{n\to\infty} \left[-2\cdot (4k+1)^{-\frac{1}{2}}\right]_1^n$
5.	Valuar.	$\frac{1}{4}\cdot \lim_{n\to\infty} \left[-2\cdot(4n+1)^{-\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{4}\cdot \lim_{n\to\infty}\left[-2\cdot(4(1)+1)^{-\frac{1}{2}}\right]$
6.	Simplificar.	$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{-1}{2\sqrt{4n+1}}\right]-\left[\frac{1}{2\sqrt{5}}\right]$
7.	Tiende a infinito.	$\to\infty$
8.	Si el límite de la integral tiende a infinito, la serie diverge.	$Diverge$

La serie diverge.

Tema 3

TEMA 3 (15 Pts.)
Encuentre el intervalo abierto y el radio de convergencia de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2(x+7)^k}{3^{2k}}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Realizar prueba de las proporciones.	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert < 1$
2.	$a_n = \frac{k^2(x+7)^k}{3^{2k}}$	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{(n+1)^2(x+7)^{(n+1)}}{3^{2(n+1)}} \cdot \frac{3^{2n}}{n^2(x+7)^n} \right\rvert < 1$
3.	Simplificar.	$\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{(n^2+2n+1)(x+7)}{3n^2} \right\rvert < 1$
4.	Sacar términos que no dependen de n.	$\frac{\lvert x+7 \rvert}{3} \lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{n^2+2n+1}{n^2} \right\rvert < 1$
5.	Aplicar l'Hôpital.	$\frac{\lvert x+7 \rvert}{3} \lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{2}{6} \right\rvert < 1$
6.	Operar limite.	$\frac{\lvert x+7 \rvert}{9} < 1$
7.	Resolver desigualdad.	$\lvert x+7 \rvert < 9$ $x+7<9$ ⋮ $x+7>-9$ $x<2$ ⋮ $x>-16$ $x \in (-16, 2)$

Intervalo Abierto: $\boldsymbol{x \in (-16, 2)}$ *Radio de Convergencia:* $\mathbf{9}$

Tema 4

TEMA 4 (10 Pts.)

Determine si la serie converge o diverge. Si converge determine la suma.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 11k + 30}$$

No.	Explicación	Operatoria
1.	La prueba de las proporciones no concluye.	
2.	La prueba de la raíz no concluye.	
3.	Se separará en fracciones parciales.	$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 11k + 30}$$
4.	Factorizar denominador.	$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 11k + 30} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+6)(k+5)}$$
5.	Separar fracciones.	$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 11k + 30} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{A}{(k+6)} + \frac{B}{(k+5)}\right]$$
6.	Sumar fracciones separadas.	$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 11k + 30} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(A+B)k + (5A+6B)}{k^2 + 11k + 30}\right]$$

7.	Igualar numeradores.	$1 = (A+B)k + (5A+6B)$
8.	Encontrar constantes.	$A = -1 \qquad B = 1$
9.	Sustituir constantes.	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+11k+30} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{-1}{(k+6)} + \frac{1}{(k+5)}\right]$
10.	$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+11k+30}$	$S = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{(k+5)} - \frac{1}{(k+6)}\right]$
11.	Escribir sumandos clave.	$S = \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right] + \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right] + \cdots + \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}\right]$
12.	Identificar patrón. Los números se eliminarán por parejas.	$S = \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right] + \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right] + \cdots + \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}\right]$
13.	El límite no se elimina con el patrón, pero tiende a cero.	$S = \frac{1}{6} + \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+6}\right]$
14.		$S = \frac{1}{6}$

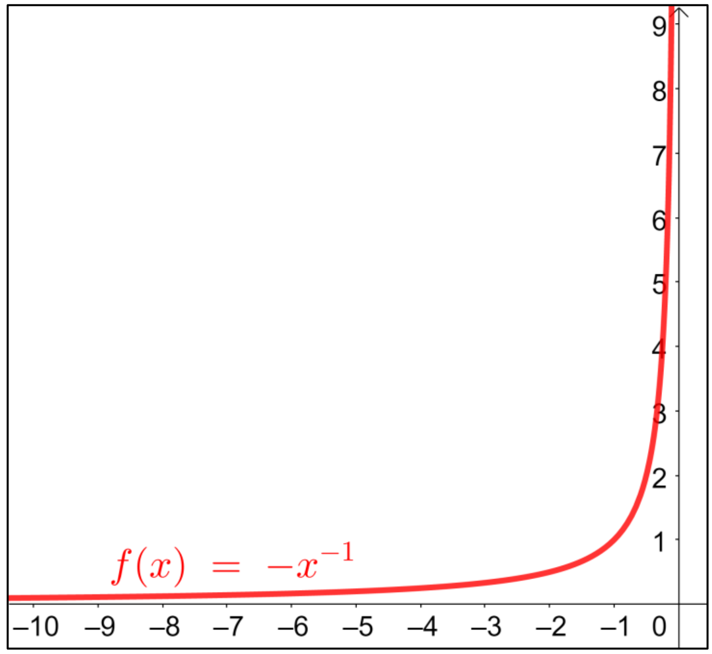
La serie converge a 1/6

Tema 5

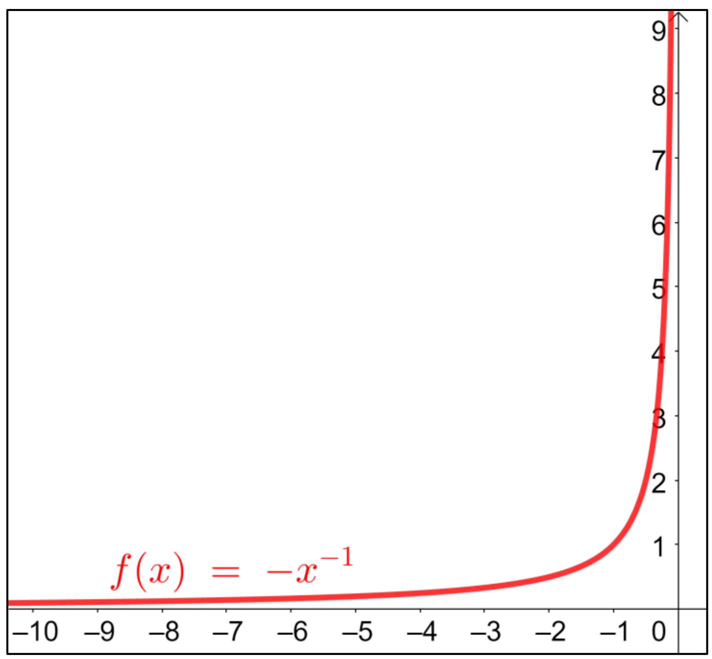
TEMA 5 (10 Pts.)

Elimine los parámetros del conjunto de ecuaciones paramétricas y obtenga una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica. Luego trace la gráfica de la ecuación. $x(t) = -e^{t}; y(t) = e^{-t}$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Despejar t en $x(t)$	$x = -e^{t}$ $-x = e^{t}$ $\ln(-x) = t \quad , \quad x < 0$ $\ln(-x) = t \quad , \quad x < 0$
2.	Despejar t en $y(t)$	$y = e^{-t}$ $\ln y = -t \quad , \quad y > 0$ $-\ln y = t \quad , \quad y > 0$
3.	Igualar expresiones.	$\ln(-x) = -\ln y \quad , \quad \begin{matrix} x < 0 \\ y > 0 \end{matrix}$
4.	Despejar y.	$y = -x^{-1} \quad , \quad \begin{matrix} x < 0 \\ y > 0 \end{matrix}$

5.	Graficar.	

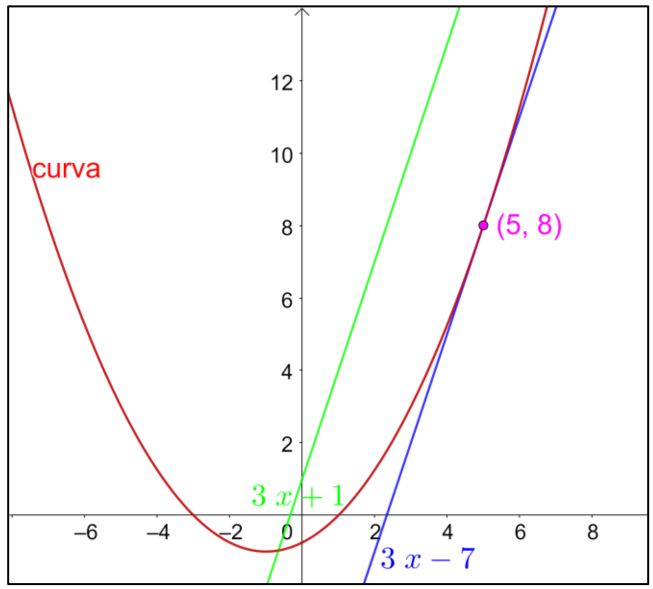
$$\mathbf{y}(x) = -\mathbf{x}^{-1} \quad , \quad \begin{matrix} \mathbf{x} < \mathbf{0} \\ \mathbf{y} > \mathbf{0} \end{matrix}$$



Tema 6

TEMA 6 (10 Pts.)
Una curva C tiene ecuaciones paramétricas $x(t) = 2t - 5$ y $y(t) = t^2 - 4t + 3$. Encuentre una ecuación de la recta tangente a C que es paralela a $y = 3x + 1$.

No.	Explicación	Operatoria
1.	Derivar $x(t)$	$\frac{dx}{dt} = 2$
2.	Derivar $y(t)$	$\frac{dy}{dt} = 2t - 4$
3.	Calcular pendiente.	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t-4}{2} = t - 2$
4.	Pendiente debe ser igual a la de la recta paralela. $y = 3x + 1$	$t - 2 = 3$
5.	El t encontrado es el de tangencia.	$t = 5$
6.	Sustituir t encontrado.	$x(5) = 2(5) - 5$ $x(5) = 5$ $y(5) = (5)^2 - 4(5) + 3$ $y(5) = 8$
7.	Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta.	$y - y_0 = m(x - x_0)$
8.	Tenemos el punto y la pendiente cuando $t = 5$	$y - 8 = 3(x - 5)$

9.	Despejar y	$y = 3x - 7$
10.	Comprobamos con gráfica.	

$$\boldsymbol{y = 3x - 7}$$

Tema 7

TEMA 7 (10 Pts.)
Encuentre la longitud de la curva $x(t) = e^t sent;$ $y(t) = -e^t cost;$ y $0 \leq t \leq \pi$

No.	Explicación	Operatoria
1.	Fórmula de la longitud de una curva.	$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$
2.	Identificar límites de integración.	$a = 0$ $b = \pi$
3.	Derivar $f(t)$	$f'(t) = e^t \cos t + e^t \sin t$
4.	Elevar al cuadrado	$[f'(t)]^2 = e^{2t}(\cos t + \sin t)^2$
5.	Derivar $g(t)$	$g'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t$
6.	Elevar al cuadrado	$[g'(t)]^2 = e^{2t}(\sin t - \cos t)^2$
7.	Sustituir en formula	$L = \int_0^\pi \sqrt{[e^{2t}(\cos t + \sin t)^2] + [e^{2t}(\sin t - \cos t)^2]} dt$
8.	Simplificar	$L = \int_0^\pi \sqrt{2e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t)} dt$
9.	Simplificar más	$L = \int_0^\pi \sqrt{2}\, e^t dt$

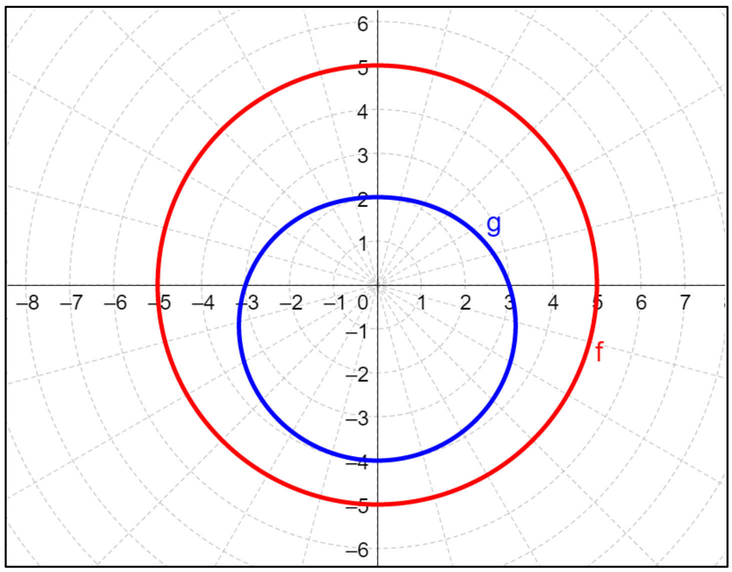
10.	Integrar	$L = \left[\sqrt{2}\, e^{t}\right]_{0}^{\pi}$
11.	Valuar	$L = \sqrt{2}[e^{\pi} - 1] \approx 31.31$

$$\mathbf{Longitud} = \sqrt{\mathbf{2}}[\mathbf{e}^{\boldsymbol{\pi}} - \mathbf{1}] \approx \mathbf{31.31}$$

Tema 8

TEMA 8 (25 Pts.)

Determine el área de la región dentro del círculo $r = 5$ y fuera de la limacón $r = 3 - \operatorname{sen}\boldsymbol{\theta}$.

No.	Explicación	Operatoria	
1.	Graficar		
2.	Formula del área de una región entre dos curvas polares	$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f^2(\theta) - g^2(\theta)]d\theta$$	
3.	Identificar limites en la grafica	$\alpha = 0$	$\beta = 2\pi$
4.	Identificar funciones	$f(\theta) = 5$	$g(\theta) = 3 - \sin\theta$
5.	Elevar al cuadrado	$f^2(\theta) = 25$	$g^2(\theta) = 9 - 6\sin\theta + \sin^2\theta$

6.	Sustituir en formula	$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(25) - (9 - 6\sin\theta + \sin^2\theta)]d\theta$
7.	Simplificar	$A = \int_0^{2\pi} \left[8 + 3\sin\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right] d\theta$
8.	Separar integrales	$A = \int_0^{2\pi} 8\, d\theta + \int_0^{2\pi} 3\sin\theta \; d\theta + \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\sin^2\theta \; d\theta$
9.	Integrar la primera	$\int_0^{2\pi} 8\, d\theta = [8\theta]_0^{2\pi} = 16\pi$
10.	Integrar la segunda	$\int_0^{2\pi} 3\sin\theta \; d\theta = [-3\cos\theta]_0^{2\pi} = 0$
11.	Integrar la tercera	$\int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\sin^2\theta \; d\theta$ $= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right] \; d\theta$ $= -\left[\frac{1}{4}\theta - \frac{1}{8}\sin(2\theta)\right]_0^{2\pi}$ $= -\frac{\pi}{2}$
12.	Sustituir resultados de integrales.	$A = [16\pi] + [0] + \left[-\frac{\pi}{2}\right]$
13.	Sumar	$A = \frac{31}{2}\pi$

$$\boldsymbol{Área = \frac{31}{2}\pi \approx 48.7}$$