Clave-107-2-M-1-00-2015

Universidad de San Carlos de Guatemala

Facultad de Ingeniería

Departamento de matemática

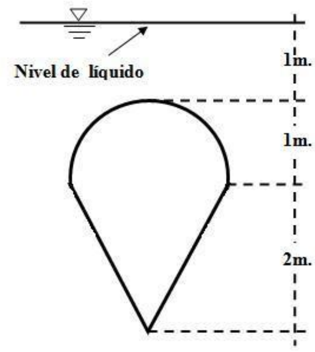
Curso:	Matemática Intermedia 1
Código del curso:	107
Semestre:	Primer semestre 2015
Tipo de examen:	Segundo Examen Parcial
Nombre de la persona que resolvió el examen:	Juan Francisco Chajón Villatoro
Catedrático del curso:	Ing. Douglas Kenedy Román

Universidad de San Carlos de Guatemala
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática
Matemática Intermedia 1

Segundo Examen Parcial
Jornada Matutina
17 de marzo de 2015
Temario A

TEMA No.1 (12 puntos)

Plantee la o las integrales necesarias para calcular la fuerza hidrostática que soporta sobre una de las caras, la placa mostrada, si está sumergida en agua según las condiciones del gráfico.



TEMA No.2 (24 puntos)

Resolver

A) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1-x}\,dx$ B) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$ C) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^3+2x}\,dx$

TEMA No.3 (14 puntos)

Dada la integral

$$\int_1^3 \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$$

i) Obtenga el valor aproximado usando la regla del Trapecio con $n=6$ use cuatro decimales.

ii) Resuelva la integral normalmente

TEMA No.4 (21 puntos)

1) Dada la ecuación $9x^2+4y^2=36$ entre el punto (2,0) y el punto (0,3), obtenga una parametrización de la curva con dirección a favor de las agujas.

2) Dada las ecuaciones paramétricas $x(t)=\sin t$; $y(t)=1-\sin t$ entre (1,0) y el punto (0,1)
   a) Grafique la curva indicando la dirección.
   b) Plantee la integral que calcule el área de la superficie que se genera al girar la curva alrededor del eje y, en coordenadas paramétricas.

TEMA No.5 (29 puntos)

A) Dado el punto (-1,1) en cartesianas, obtenga su equivalente en coordenadas polares según las restricciones:

i) $r<0$; $\theta<0$

ii) $r>0$; $\theta>2\pi$

(9 puntos)

B) Dadas las curvas en polares:

$r^2=4\cos(2\theta)$; $r^2=4sen(2\theta)$

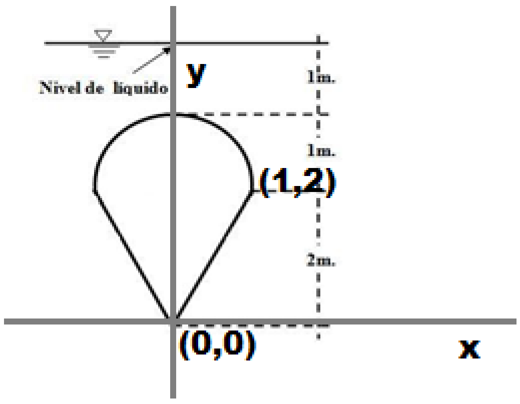
i) Determine los puntos de intersección. (4 puntos).

ii) Grafique ambas curvas en un mismo plano. (8 puntos)

iii) Plantee la o las integrales que calculen el área dentro de $r^2=4sen(2\theta)$ y fuera de $r^2=4\cos(2\theta)$. (8 puntos)

TEMA # 1 (Fuerza Hidrostática)

Analizando la figura se observa simetría respecto al eje y. A su vez se observa que la puerta está compuesta de dos figuras conocidas: un semicírculo y un par de rectas. Para utilizar el mismo diferencial en las integrales de fuerza se utilizara un dy Y planteando un origen de coordenadas en el vértice del triangulo



$$F_{hidrostática} = \rho g \int_a^b h \, dA$$

Primera integral:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

$$y - y_o = 2(x - x_o)$$
$$y = 2x$$
$$\frac{y}{2} = x$$

$$F_1 = 2\rho g \int_0^2 (4-y)\left(\frac{y}{2}\right) dy$$

Segunda Integral:

$$x^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1-(y-2)^2}$$

$$F_2 = 2\rho g \int_2^3 (4-y)\sqrt{1-(y-2)^2} dy$$

Fuerza Total:

$$F_{Total} = F_1 + F_2$$

$$\boxed{\boldsymbol{F_{Total} = 2\rho g \int_0^2 (4-y)\left(\frac{y}{2}\right) dy + 2\rho g \int_2^3 (4-y)\sqrt{1-(y-2)^2} dy}}$$

TEMA # 2 (Integrales Impropias)

Inciso a)

$$\boldsymbol{\int_1^2 \frac{1}{1-x} dx}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{1-x} dx = \lim_{k \to 1^+} \int_k^2 \frac{1}{1-x} =$$

$$\lim_{k \to 1^+} [-\ln(1-x)] \Big|_k^2$$

$$\lim_{k \to 1^+} [-\ln(1-2) + \ln(1-k)] = -\infty$$

$$\boxed{\boldsymbol{\int_1^2 \frac{1}{1-x} dx = -\infty \therefore Diverge}}$$

Inciso b)

$$\int_{-\infty}^{0} \boldsymbol{xe^{-x^2}\,dx}$$

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0}\frac{(-2x)}{2}e^{-x^2}dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{t}^{0}$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-0^2}+\frac{1}{2}e^{-t^2}\right] = -\frac{1}{2}+0$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0} \boldsymbol{xe^{-x^2}\,dx} = -\frac{1}{2} \therefore \boldsymbol{Converge}}$$

Inciso c)

$$\int \boldsymbol{\frac{x^2+3}{x(x+2)}dx}$$

$$\int \frac{x^2+3}{x(x^2+2)}dx = \int\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+2)}\right)dx$$

$$Ax^2+2A+Bx^2+Cx = x^2+3$$

$$(A+B)x^2+2A+Cx = 0$$

$$A+B=1$$
$$C=0$$
$$2A=3$$

$$A=\frac{3}{2}$$
$$B=-\frac{1}{2}$$
$$C=0$$

$$\int\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{(x^2+2)}\right)dx = \int\left(\frac{\frac{3}{2}}{x}+\frac{-\frac{1}{2}x}{(x^2+2)}\right)dx$$

$$\int\frac{\frac{3}{2}}{x}dx+\int\frac{-\frac{1}{2}x}{(x^2+2)}dx$$

$$\frac{3}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln|x^2+2|+C$$

$$\boxed{\int \boldsymbol{\frac{x^2+3}{x(x+2)}dx = \frac{3}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+2\right|+C}}$$

TEMA # 3 (Métodos numéricos para resolver integrales)

$$\int_1^3 \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$$

i) Método del trapecio con n=6

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta x = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$$

n	x	k	$f(x)$	$k*f(x)$
0	1	1	0.33333	0.33333
1	$\frac{8}{6}$	2	0.29798	0.59596
2	$\frac{10}{6}$	2	0.27306	0.54612
3	$\frac{12}{6}$	2	0.25419	0.50838
4	$\frac{14}{6}$	2	0.23922	0.47844
5	$\frac{16}{6}$	2	0.22694	0.45388
6	3	1	0.23264	0.23264
		TOTAL		3.14875

$$\boxed{\int_1^3 \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{6}(3.14875) \cong 0.524792}$$

ii) Resolver normalmente:

$$\int_1^3 \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$$

Se procede a realizar la integral por sustituciones diversas encontrando el M.C.M de los componentes:

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & & \end{array}$$

$$u^6 = x$$

$$6u^5 du = dx$$

$$\int_1^3 \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \int_1^3 \frac{6u^5 du}{2u^2+u^3}$$

$$6\int_1^3 \frac{u^5}{u^2(u+2)}du = 6\int_1^3 \frac{u^3}{u+2}du$$

Aplicando división sintética:

$$6\int_1^3 \left(u^2+2u+4-\frac{8}{u+2}\right)du$$

$$\frac{6}{3}u^3 - \frac{12}{2}u^2 + 24u - 48\ln|u+2| + C$$

Valuando los límites de integración:

$$\int_1^3 \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \left[\frac{6}{3}x^{\frac{3}{6}} - \frac{12}{2}x^{\frac{2}{6}} + 24x^{\frac{1}{6}} - 48\ln\left|x^{\frac{1}{6}}+2\right|\right]_1^3$$

$$\left[\frac{6}{3}3^{\frac{3}{6}} - \frac{12}{2}3^{\frac{2}{6}} + 24(3)^{\frac{1}{6}} - 48\ln\left|3^{\frac{1}{6}}+2\right|\right] - \left[\frac{6}{3}1^{\frac{3}{6}} - \frac{12}{2}1^{\frac{2}{6}} + 24(1)^{\frac{1}{6}} - 48\ln\left|1^{\frac{1}{6}}+2\right|\right]$$

$$\boxed{\int_1^3 \frac{dx}{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} \cong 0.5210}$$

TEMA # 4 (Coordenadas Paramétricas)

i)

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Parametrización de una elipse:

$$x(t) = 2\sin t$$
$$y(t) = 3\cos t$$

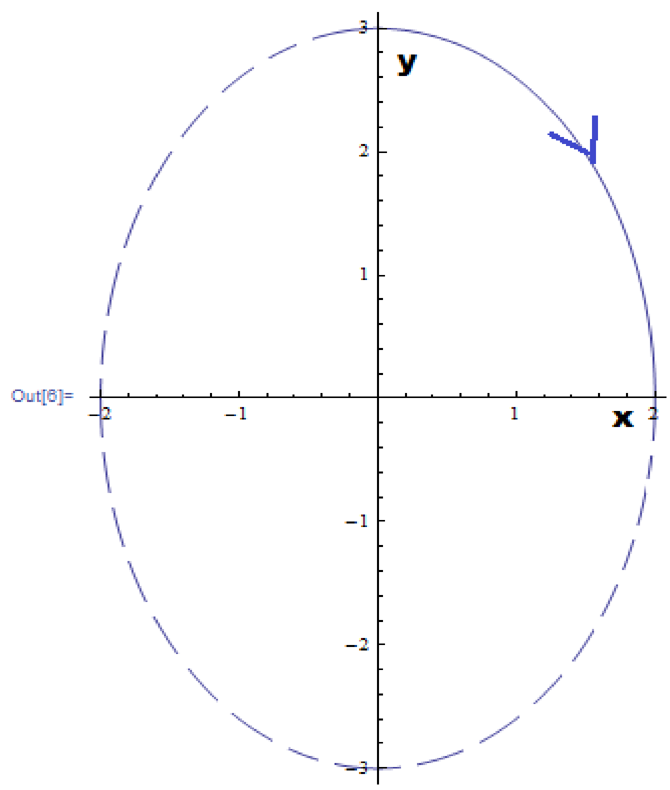
$$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Para $(2,0)$:

$$2 = 2\sin t \qquad\qquad 0 = 3\cos t$$
$$t = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad t = \frac{\pi}{2}$$

Para $(0,3)$:

$$0 = 2\sin t \qquad\qquad 3 = 3\cos t$$
$$t = 0 \qquad\qquad t = 0$$



ii)

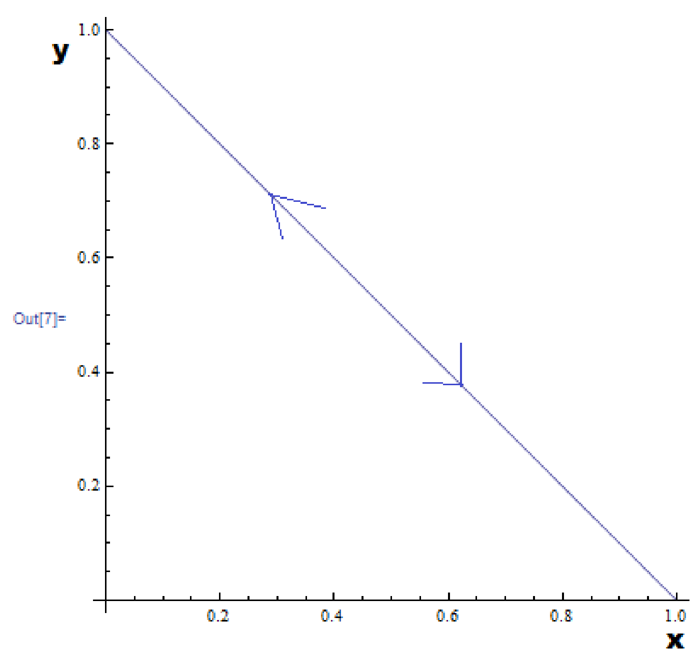
$$x(t) = \sin t$$
$$y(t) = 1 - \sin t$$

Para $(1,0)$:

$$1 = \sin t \qquad\qquad 0 = 1 - \sin t$$
$$t = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad t = \frac{\pi}{2}$$

Para $(0,1)$:

$$1 = \sin t \qquad\qquad 0 = 1 - \sin t$$
$$t = 0 \qquad\qquad t = 0$$



b)

$$\int_a^b x(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

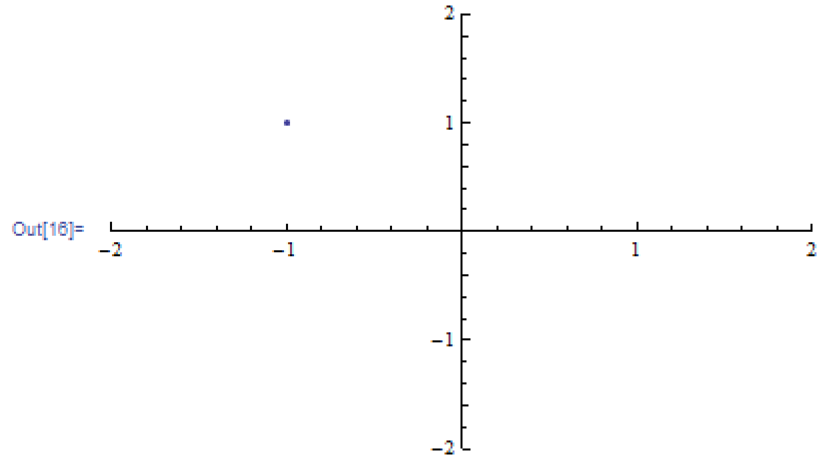
$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\sin t\sqrt{(\cos t)^2 + (-\cos t)^2}\, dt}$$

TEMA # 5 (Coordenadas Polares)

(a) Dado el punto $(-1{,}1)$ obtener su equivalente en coordenadas polares, con las siguientes restricciones:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$



i) $r < 0\,;\ \theta < 0$

$$\boxed{(-1{,}1) \to \left(-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)}$$

ii) $r > 0\,;\ \theta > 2\pi$

$$(-1{,}1) \to \left(\sqrt{2}, 2\pi + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{(-1{,}1) \to \left(\sqrt{2}, \frac{11\pi}{4}\right)}$$

(b) Dadas las curvas polares:

$$r^2 = 4\cos 2\theta$$
$$r^2 = 4\sin 2\theta$$

i) Determine los puntos de intersección

$$r^2 = r^2$$

$$4\cos 2\theta = 4\sin 2\theta$$

$$\frac{4\sin 2\theta}{4\cos 2\theta} = 1$$

$$\tan 2\theta = 1$$

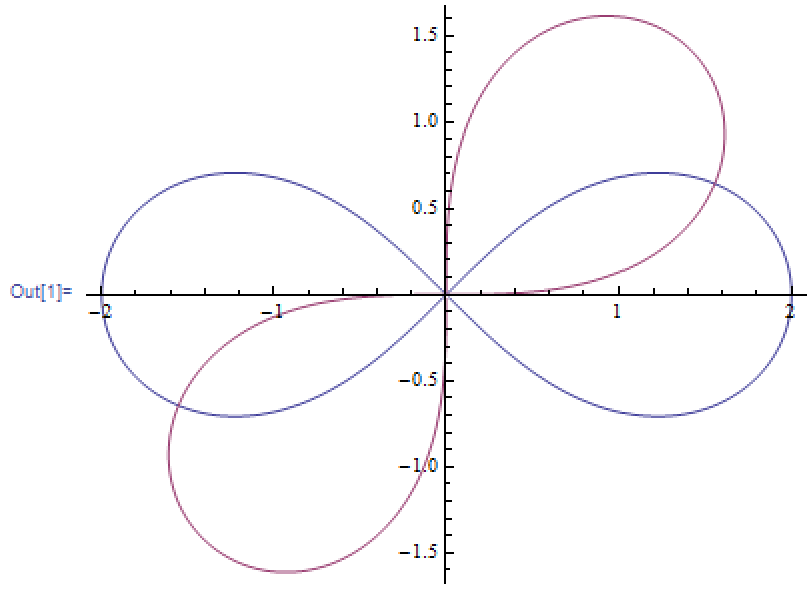
$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}(1)$$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{8}}$$

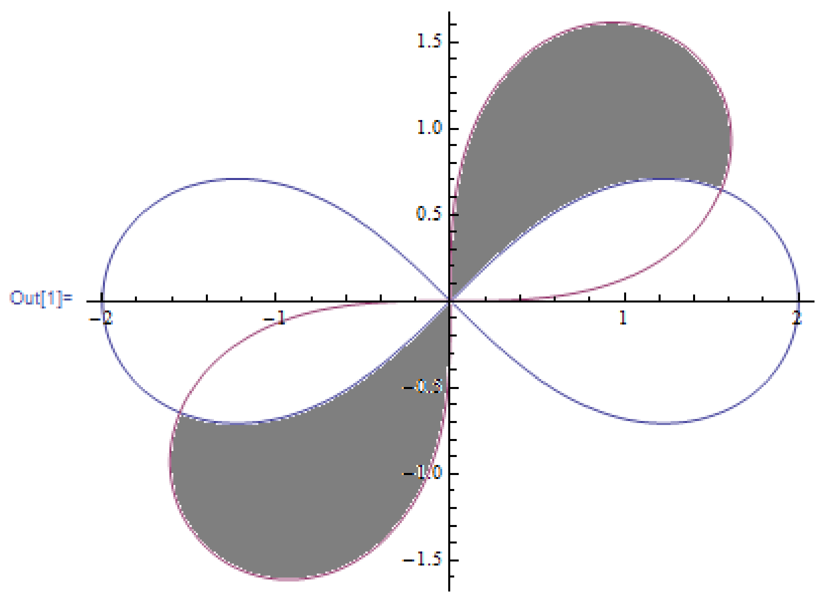
ii) Grafique ambas curvas en un mismo plano

$$r^2 = 4\cos 2\theta$$
$$0 = 4\cos 2\theta$$
$$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

$$r^2 = 4\sin 2\theta$$
$$0 = 4\sin 2\theta$$
$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$



iii) Plantee las integrales que calculen el área dentro de $r^2 = 4\sin 2\theta$ y fuera de $r^2 = 4\cos 2\theta$



$$\boxed{A = (2)\frac{1}{2}\int_{\pi/8}^{\pi/4}\left(\left(\sqrt{4\sin 2\theta}\right)^2 - \left(\sqrt{4\cos 2\theta}\right)^2\right)d\theta + 2\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\sqrt{4\sin 2\theta}\right)^2 d\theta}$$