6.9 Coordenadas Cilíndricas

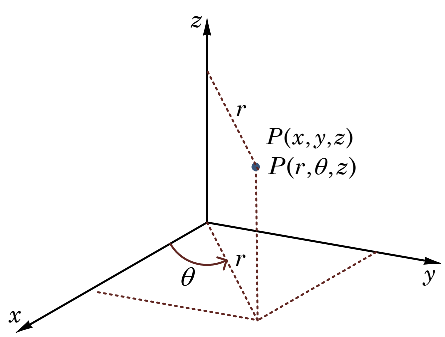
OBJETIVOS

- Representar puntos en coordenadas cilíndricas.
- Convertir puntos de coordenadas cilíndricas a rectangulares y viceversa.
- Dibujar la gráfica de una ecuación expresada en coordenadas cilíndricas.
- Convertir una ecuación dada en coordenadas cilíndricas a rectangulares y viceversa.

En esta sección se estudian las coordenadas cilíndricas, este sistema es similar al sistema de coordenadas polares en el plano, al generalizarlas a tres dimensiones únicamente se agrega la coordenada z. Las coordenadas cilíndricas son de mucha utilidad en el cálculo de varias variables ya que permiten expresar de forma sencilla algunas ecuaciones que en coordenadas rectangulares son complicadas, principalmente las superficies cilíndricas paralelas al eje z y las superficies de revolución con eje de rotación en el eje z.

Coordenadas cilíndricas

En un sistema de coordenadas cilíndricas, un punto P en el espacio se representa de la forma $P(r, \theta, z)$. En donde las primeras dos coordenadas r y θ representan las coordenadas polares del punto en el plano polar (plano xy). La coordenada x es la distancia vertical positiva hacia arriba y negativa hacia abajo, que va desde el plano polar hacia el punto. La siguiente figura muestra un punto en el espacio con sus correspondientes coordenadas cilíndricas y rectangulares



Las fórmulas para convertir un punto de coordenadas cilíndricas a rectangulares o de coordenadas rectangulares a cilíndricas ya se estudiaron en la unidad de coordenadas polares, están son las siguientes

Coordenadas cilíndricas a rectangulares

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

Coordenadas rectangulares a cilíndricas

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z$$

Ejemplo 1: Convertir coordenadas cilíndricas a rectangulares

Convertir los puntos dados en coordenadas cilíndricas a sus correspondientes coordenadas rectangulares

a. $\left(4, \frac{7\pi}{6}, -5\right)$ **b.** $\left(-6, \frac{3\pi}{4}, 5\right)$

Solución

a. Recuerde que la representación en coordenadas rectangulares es única, por lo que solo existe un punto en coordenadas rectangulares para un punto dado en coordenadas cilíndrica

$$x = r\cos\theta = 4\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 4\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$z = z = -5$$

Por lo que las coordenadas rectangulares del punto son

$$\left(-2\sqrt{3}, -2, -5\right)$$

b. Pare este otro punto se tiene

$$x = r\cos\theta = -6\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = -6\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}$$

$$z = z = 5$$

Por lo que las coordenadas rectangulares del punto son

$$\left(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}, 5\right)$$

Ejemplo 2: Convertir coordenadas rectangulares a cilíndricas

Convertir los puntos dados en coordenadas rectangulares a sus correspondientes coordenadas cilíndricas

a. $(4, -4, 6)$ **b.** $\left(-3, 3\sqrt{3}, -5\right)$

Solución

a. Recuerde que existen infinitas formar de representar el mismo punto en coordenadas polares, pues exactamente lo mismo sucede en coordenadas cilíndricas.

$$r^2 = x^2 + y^2, \text{ entonces } r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{(4)^2 + (-4)^2} = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{4} = -1, \text{ entonces } \theta = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4} + n\pi$$

Hay dos posibles valores de r y muchas posibilidades para θ. Dos posibles soluciones son

$$\left(4\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, 6\right), \qquad \left(-4\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, 6\right)$$

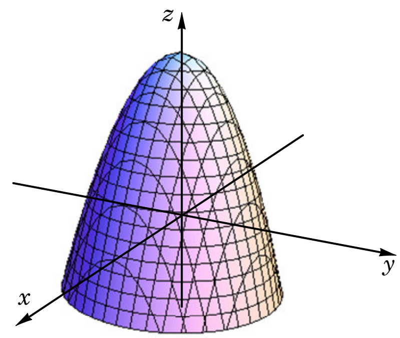
Ejemplo 3: Convertir una ecuación de coordenadas rectangulares a cilíndricas

Hallar una ecuación en coordenadas cilíndricas para la ecuación dada en coordenadas rectangulares

a. $z = 10 - x^2 - y^2$ **b.** $y = x^2$

Solución

a. la figura muestra la gráfica de la superficie $z = 10 - x^2 - y^2$, que es una superficie de revolución con eje de rotación en el eje z.



Reordenando la ecuación par expresarla en coordenadas cilíndricas

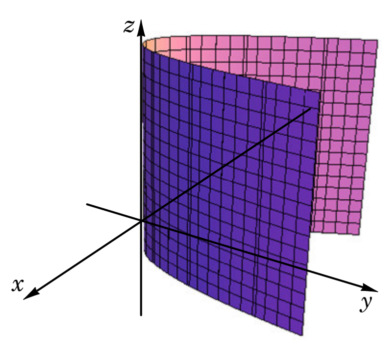
$$z = 10 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 = 10 - z$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$

$$r^2 = 10 - z$$

b. La figura muestra la gráfica de la superficie $y = x^2$, que como se estudió en la sección anterior es una superficie cilíndrica con una traza en forma de parábola en el plano xy



Para convertir a coordenadas cilíndricas utilizamos las fórmulas de conversión

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$y = x^2$$

$$r\,\text{sen}\,\theta = (r\cos\theta)^2$$

$$r\,\text{sen}\,\theta = r^2\cos^2\theta$$

Dividiendo ambos lados entre r

$$\operatorname{sen}\theta = r\cos^2\theta$$

$$r = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}$$

También se puede expresar como

$$r = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\frac{1}{\cos\theta}$$

$$r = \tan\theta\sec\theta$$

Ejemplo 4: Convertir una ecuación de coordenadas cilíndricas a rectangulares

Hallar una ecuación en coordenadas rectangulares para la ecuación dada en coordenadas cilíndricas

a. $z = r^2\operatorname{sen}^2\theta$ **b.** $r^2\cos 2\theta + z^2 - 1 = 4$

Solución

a. En este caso primero se procede a encontrar la ecuación en coordenadas rectangulares y luego se dibuja la gráfica. Las fórmulas de transformación son

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

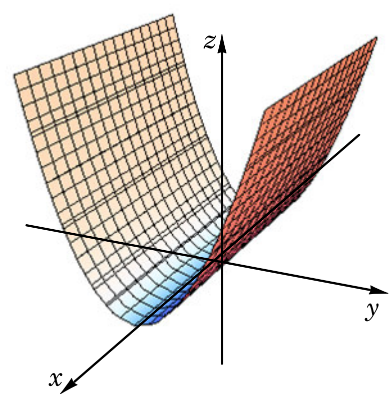
Es necesario acomodar la ecuación en coordenadas cilíndricas para hacer las sustituciones

$$z = r^2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$z = (r\operatorname{sen}\theta)^2$$

$$z = y^2$$

La superficie es un cilindro con forma de parábola en el plano *yz*. Su gráfica es la siguiente



b. para utilizar las fórmulas de transformación se requiere acomodar la ecuación en coordenadas cilíndricas

$$r^2\cos 2\theta + z^2 - 4 = 0$$

$$r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) + z^2 = 4$$

$$r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta + z^2 = 4$$

$$(r\cos\theta)^2 - (r\operatorname{sen}\theta)^2 + z^2 = 4$$

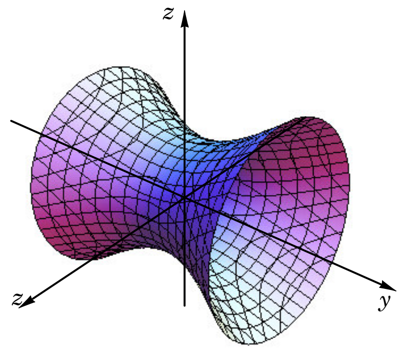
Utilizando las fórmulas de transformación

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$$

De donde se obtiene que la superficie es un hiperboloide de una hoja, con círculos como trazas en planos paralelos al plano xz, como se muestra en la siguiente figura



Ejercicios

1.

Los puntos en coordenadas cilíndricas $(2, \frac{\pi}{3}, 1)$ y $(1, -\frac{\pi}{5}, -1)$ son los extremos del diámetro de una esfera. Calcule su radio.

Respuesta:

2.

Dada la ecuación en coordenadas cilíndricas

$$r^2 cos\ 2\theta + z^2 + 1 = 0$$

Responda las siguientes preguntas

i. Su ecuación en coordenadas rectangulares es

ii. . Identifique la superficie que representa

3.

La superficie cuya ecuación es:

$$tan\ \theta = 1$$

en coordenadas cilíndricas representa:

(Sugerencia: encuentre la ecuación en coordenadas rectangulares y luego responda).

Seleccione una:

- a. Un plano paralelo al eje "z".
- b. Una esfera con centro en (0,0,0.5) y radio 0.5
- c. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- d. Un cono circular recto con eje paralelo al eje "z".
- e. Un cilindro circular recto de radio 0.5 con eje paralelo al eje "z".

4.

Escriba la ecuación en coordenadas cilíndricas e identifique la superficie, para: $z = y^2 - x^2$

Seleccione una:

- a. $z = -r^2 sen 2\theta$, hiperboloide parabólico
- b. $z = r^2(cos^2\theta - sen^2\theta)$, paraboloide hiperbólico
- c. $z = r^2 sen 2\theta$, paraboloide hiperbólico
- d. Ninguna de las respuestas es correcta
- e. $z = -r^2 cos 2\theta$, paraboloide hiperbólico

5.

Dada la ecuación en R^3

$$y^2 = x$$

Responda las siguientes preguntas

i. Identifique la superfice que representa

ii. Su ecuación en coordenadas cilíndricas es