6.8 Superficies en el espacio

OBJETIVOS

- Dibujar la gráfica de cilindros en el espacio.
- Dibujar la gráfica de superficies cuadráticas.
- Dibujar la gráfica de una superficie de revolución.

En esta sección se estudia las gráficas de las superficies en el espacio, al momento ya se han estudiado dos tipos de superficies: las esferas y los planos. Falta por estudiar los cilindros, la superficies cuadráticas y las superficies de revolución

Superficies cilíndricas

Por simplicidad solamente se trata el tema de los cilindros que son paralelos a uno de los ejes coordenados y que además la curva que los genera es se encuentra en uno de los planos coordenados

Definición

La gráfica en el espacio de una ecuación que tiene solamente dos variables es un cilindro que tiene su curva generadora en el plano de las dos variables de la ecuación y todas las rectas que generan el cilindro son perpendiculares a la curva generadora.

Ejemplo 1: Cilindro circular

Identifique la superficie y dibuje su gráfica

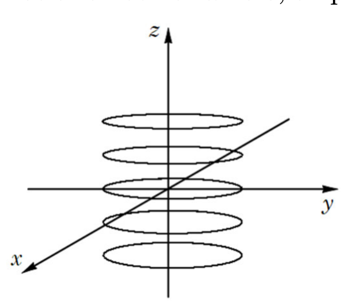
$$x^2 + y^2 = 9$$

Solución

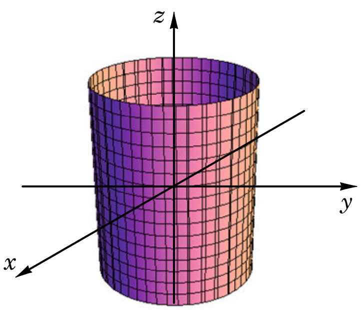
Como la ecuación tiene solo dos variables, su gráfica es un cilindro. La curva generadora está en el plano xy, y es un círculo centrado en el origen de radio 3. Los lados del cilindro circular son rectas perpendiculares al plano xy que cortan a la curva generadora.

Para dibujar la gráfica de un cilindro se recomienda dibujar la curva generadora. Luego dibujar otras curvas iguales en planos paralelos, para finalmente hacer un trazo aproximado del cilindro.

En este ejemplo se dibujan varios círculos de radio 3, en planos paralelos al plano xy



Al trazar los lados del cilindro con rectas perpendiculares al circulo y que lo corten se obtiene la figura siguiente, generada con el programa Mathematica



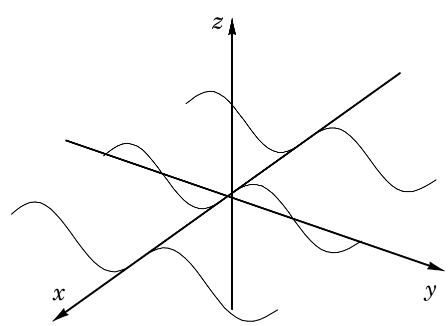
Ejemplo 2: Cilindro con forma sinoidal

Identifique la superficie y dibuje su gráfica

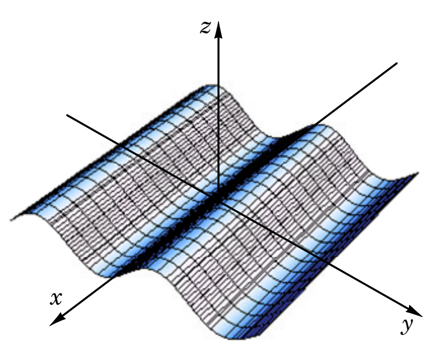
$$z = \operatorname{sen} y$$

Solución

En este caso tenemos un cilindro con una curva generadora en el plano yz con la forma de una gráfica trigonométrica. La siguiente figura muestra algunas curvas que generan el cilindro.



Al trazar rectas perpendiculares a las curvas generadoras se obtiene la figura siguiente, generada con el programa mathematica.



Superficies cuadráticas

Las superficies cuadráticas son el equivalente a las secciones cónicas estudiadas en matemática básica 1, con la diferencia que en espacio son ecuaciones con tres variables.

La ecuación general de las superficies cuadráticas es la siguiente

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Por simplicidad en esta sección no se estudian las superficies trasladadas ni rotadas, es decir solo se consideran las superficies centradas en el origen y con sus ejes paralelos o perpendiculares a los ejes de coordenadas.

Son 6 tipos básicos de superficies cuadráticas: **elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, cono elíptico, paraboloide elíptico y paraboloide hiperbólico.**

Los nombres de las superficies están formados por la secciones transversales que tienen, por ejemplo el nombre paraboloide elíptico nos indica que dos de sus secciones transversales son parábolas mientras que la otra sección transversal es una elipse. El nombre hiperboloide de una hoja nos indica que dos de sus secciones transversales son hipérbolas y la otra sección transversal puede estar formada por círculos o elipses.

Elipsoide

La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Tiene como gráfica un elipsoide con centro en el origen, sus secciones transversales en los ejes coordenados son elipses

Ejemplo 3: Elipsoide

Dibuje la gráfica de la superficie cuadrática

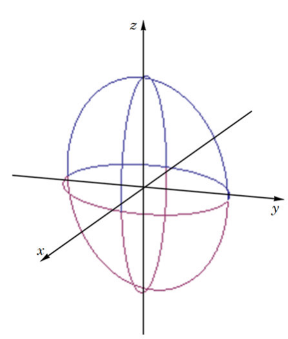
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

Solución

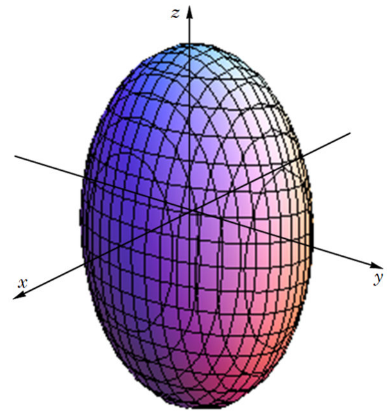
Las secciones transversales o trazas de esta superficie son elipses, estas se obtienen haciendo cero una de las variables y dibujando la gráfica en el plano correspondiente de la elipse resultante. Las ecuaciones de las trazas son

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, \qquad \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

La siguiente figura muestra las trazas



Y la figura completa del elipsoide es la siguiente



Hiperboloide de una hoja

Las ecuaciones de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Tiene como gráfica un hiperboloide de una hoja, esto se debe a que las trazas en dos de los planos son hipérbolas y en el otro plano coordenado es una elipse.

Ejemplo 4: Hiperboloide de una hoja

Dibuje la gráfica de la superficie cuadrática

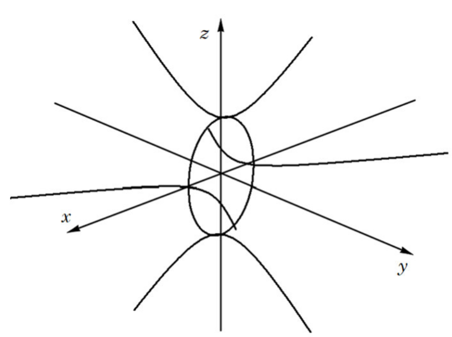
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

Solución

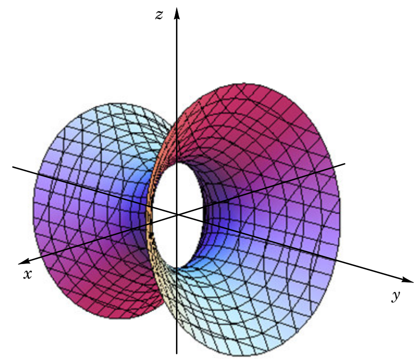
Las secciones trazas en el plano *xz* de esta superficie son elipses, mientras que en los planos *xy* son hipérbolas, al igual que en el plano *yz*.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1\,, \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1\,, \qquad -\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1 \qquad \frac{z^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

La siguiente figura muestra las trazas en los planos coordenados



Y la figura completa del hiperboloide de una hoja es la siguiente



Hiperboloide de dos hojas

Las ecuaciones de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Tiene como gráfica un hiperboloide de dos hojas, esto se debe a que las trazas en dos de los planos son hipérbolas y en el otro plano la no hay traza ya que se obtienen números imaginarios, esto hace que el sólido de divida en dos partes

Ejemplo 5: Hiperboloide de dos hojas

Dibuje la gráfica de la superficie cuadrática

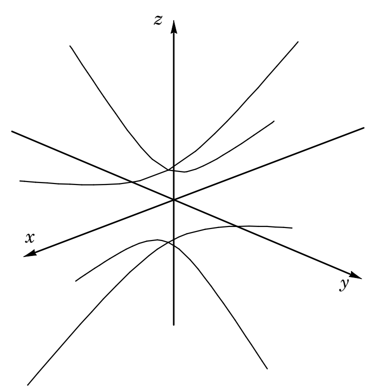
$$\frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$$

Solución

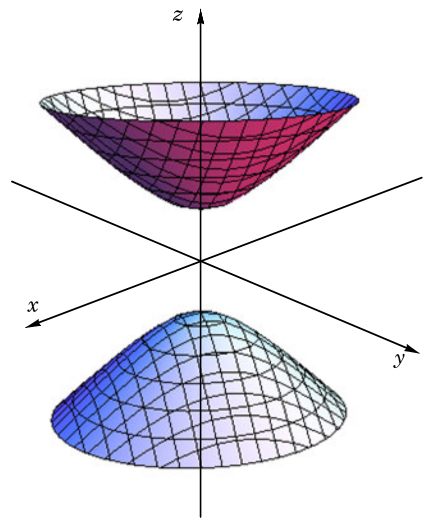
Las trazas de esta superficie en el plano *yz* y en el plano *xz* son hipérbolas. Observe que en el plano *xy* no hay traza, esto se debe a que no se genera ninguna curva en ese plano.

$$\frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1\,, \qquad \frac{z^2}{9} + \frac{x^2}{16} = 1\,, \qquad -\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$$

La siguiente figura muestra las trazas en los planos coordenados



Y la figura completa del hiperboloide de dos hojas es la siguiente



Cono elíptico

Las ecuaciones de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Tiene como gráfica un cono elíptico, al observar las trazas en los planos coordenados se tiene que en el plano xy es un punto, mientras que en los planos xz y yz son dos rectas que pasan por el origen. Observe además que al darle valores a z se van obteniendo elipses paralelas al plano xy.

Ejemplo 6: Cono elíptico

Dibuje la gráfica de la superficie cuadrática

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 0$$

Solución

Si $x = 0$ se obtiene la ecuación en el plano yz

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 0$$

Esta ecuación solo la satisface el punto $(0,0)$. Es decir que en plano yz se obtiene un punto.

Si $y = 0$ se obtiene la ecuación en el plano xz

$$\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 0$$

$$\frac{z^2}{4} = \frac{x^2}{16}$$

$$\frac{z}{2} = \pm\frac{x}{4}$$

Que son dos rectas que pasan por el origen.

Si $z = 0$ se obtiene la ecuación en el plano xy

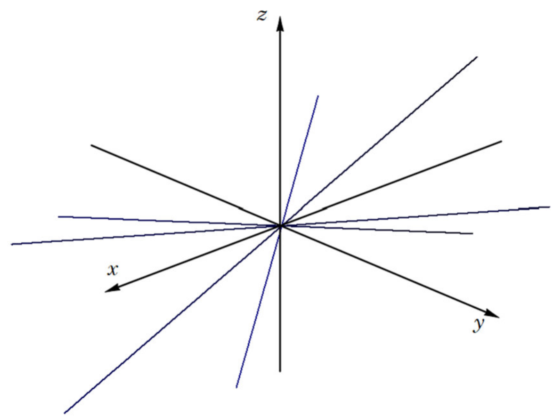
$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 0$$

$$\frac{y^2}{9} = \frac{x^2}{16}$$

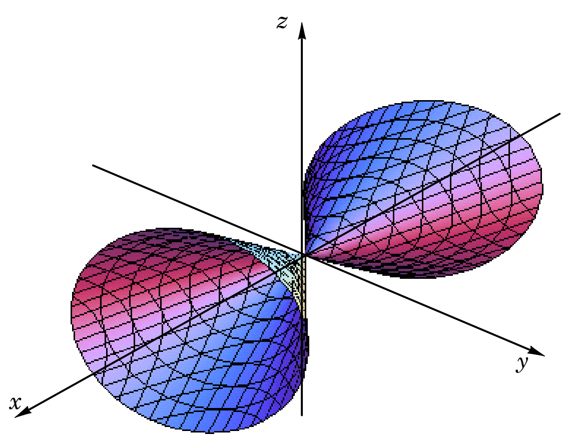
$$\frac{y}{3} = \pm\frac{x}{4}$$

Que son dos rectas que pasan por el origen.

La siguiente figura muestra las trazas en los planos coordenados



Y en esta otra figura se muestra la gráfica de la superficie completa



Paraboloide elíptico

Las ecuaciones de la forma

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Recibe el nombre de paraboloide elíptico pues sus trazas en los planos coordenados xz y yz son parábolas que tienen su vértice en el origen. Las trazas en planos paralelos al plano xy son elipses.

Ejemplo 7: Paraboloide elíptico

Dibuje la gráfica de la superficie cuadrática

$$y - x^2 - 4z^2 = 0$$

Solución

Despejando y se obtiene

$$y = x^2 + 4z^2$$

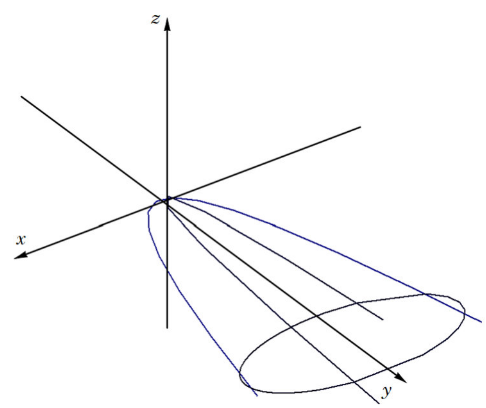
Si $z = 0$ se obtiene la ecuación en el plano xy que es una parábola.

$$y = x^2$$

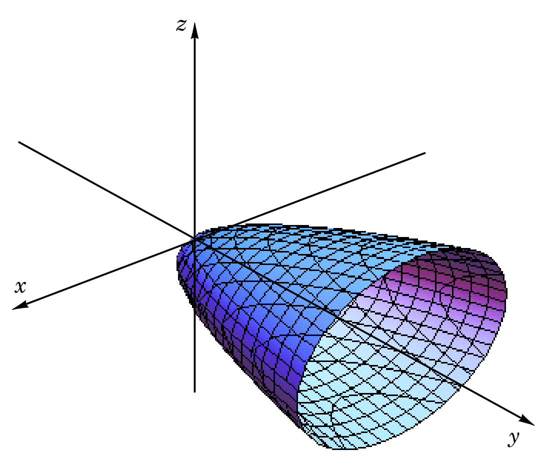
Si $x = 0$ se obtiene la ecuación en el plano yz que es una parábola.

$$y = 4z^2$$

La figura siguiente muestra las trazas de estas parábolas, también se ha incluido la traza de la elipse cuando $y = 9$



La siguiente figura muestra la gráfica del paraboloide elíptico



Paraboloide hiperbólico

Las ecuaciones de la forma

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Recibe el nombre de paraboloide hiperbólico pues sus trazas en los planos coordenados xz y yz son parábolas que tienen su vértice en el origen. Las trazas en planos paralelos al plano xy son hipérbolas con centro en el origen.

Ejemplo 8: Paraboloide hiperbólico

Dibuje la gráfica de la superficie cuadrática

$$z = 2x^2 - 4y^2$$

Solución

Si $y = 0$ se obtiene la ecuación en el plano xz que es una parábola.

$$z = 2x^2$$

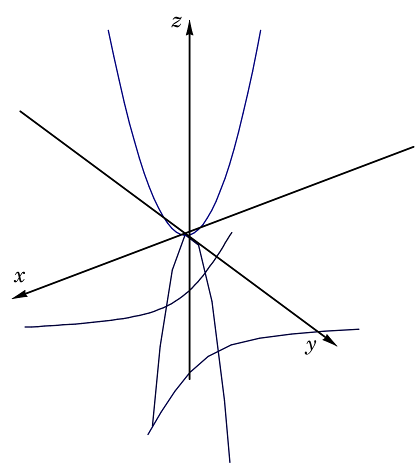
Si $x = 0$ se obtiene la ecuación en el plano yz que es una parábola.

$$z = -4y^2$$

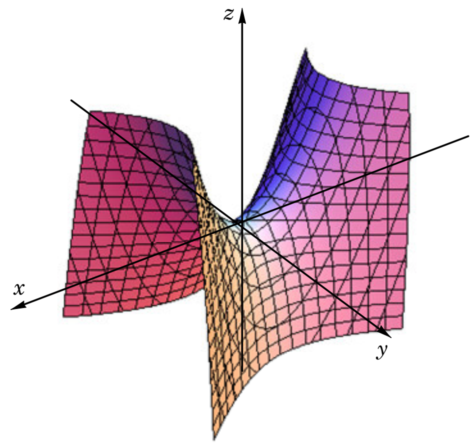
Para valores constantes de z se obtienen hipérbolas de la forma

$$2x^2 - 4y^2 = c$$

La figura siguiente muestra las dos parábolas y la gráfica de la hipérbola para $z = -4$



En la figura siguiente se muestra la gráfica generada con el programa Mathematica. Esta es una de las gráficas mas complicadas de dibujar sin el uso de la tecnología.



Superficies de revolución

El tipo de gráficas en el espacio que se estudia en este curso son las superficies de revolución. Como ya se estudió en el curso, el calculo del área de una superficie de revolución. En este tema se estudia como obtener la ecuación del sólido que se forma cuando una curva es rotada alrededor de uno de los ejes de coordenadas.

Es sencillo obtener la ecuación de una superficie de revolución ya que las secciones transversales son perpendiculares al eje de rotación son círculos de radio r, centrados en el eje alrededor del cual rota. El radio del círculo es una función expresada en términos de la variable correspondiente al eje de rotación.

Caso 1:

Si la gráfica de una función $r(x)$ se gira sobre el eje x, la ecuación de la superficie de revolución tiene una ecuación de la forma

$$y^2 + z^2 = [r(x)]^2$$

Caso 2:

Si la gráfica de una función $r(y)$ se gira sobre el eje y, la ecuación de la superficie de revolución tiene una ecuación de la forma

$$x^2 + z^2 = [r(y)]^2$$

Caso 3:

Si la gráfica de una función $r(z)$ se gira sobre el eje z, la ecuación de la superficie de revolución tiene una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 = [r(z)]^2$$

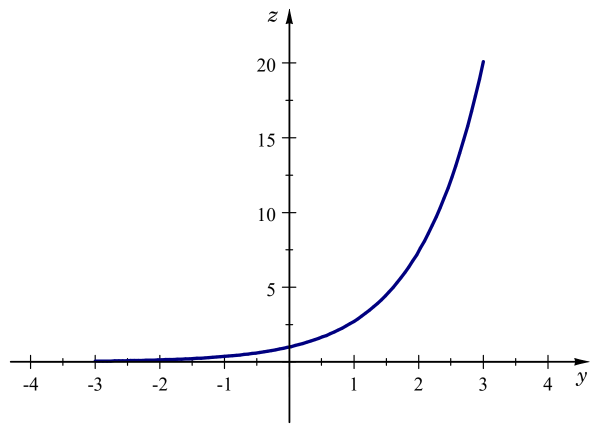
Ejemplo 9: Superficie de revolución

Obtenga una ecuación de la superficie que se genera cuando la gráfica de $y = \ln z$ se hace girar alrededor del eje z. Dibuje su gráfica

Solución

La siguiente figura muestra la gráfica en el plano yz de la curva que se va a rotar alrededor del eje x. Observe que la función debe estar en términos de la variable del eje de rotación

$$y = \ln z$$

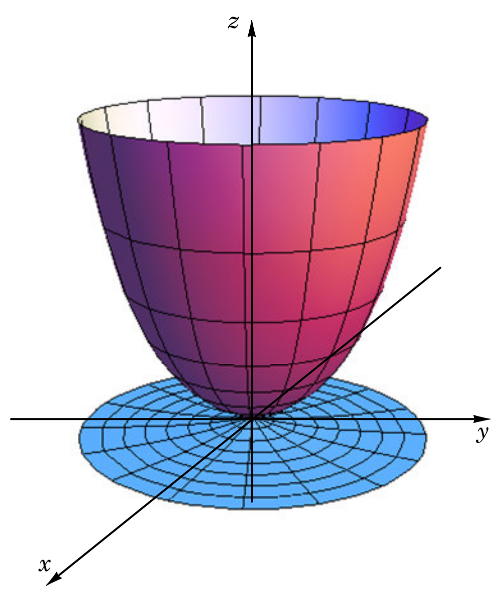


La ecuación de la superficie de revolución es

$$x^2 + y^2 = [r(z)]^2$$

$$x^2 + y^2 = [\ln z]^2$$

La gráfica de esta superficie se muestra en la figura siguiente



Ejemplo 10: Superficie de revolución

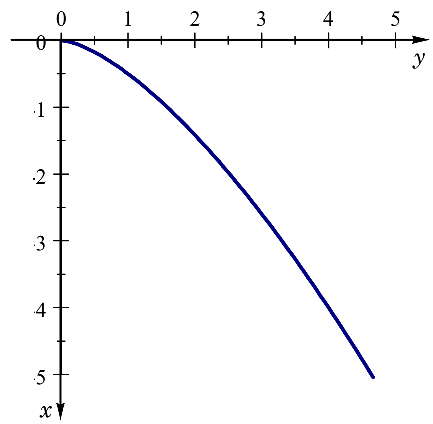
Obtenga una ecuación de la superficie que se genera cuando la gráfica de $4x^2 = y^3$ se hace girar alrededor del eje y. Dibuje su gráfica

Solución

Como la curva gira alrededor del eje y, hay que expresarla en términos de y. Despejando x en la ecuación

$$4x^2 = y^3$$
$$x = \sqrt{\frac{y^3}{4}}$$

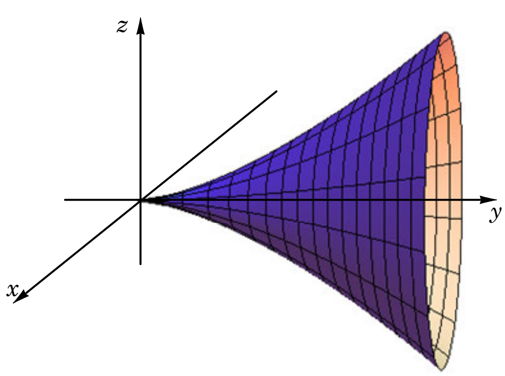
La gráfica de esta curva en el plano xy es



Como la curva se gira alrededor del eje y, la ecuación de la superficie es

$$x^2 + z^2 = [r(y)]^2$$
$$x^2 + z^2 = \left[\sqrt{\frac{y^3}{4}}\right]^2$$
$$x^2 + z^2 = \frac{y^3}{4}$$

La gráfica de la superficie de revolución es



1.

Dada la superficie en el espacio: $x^2 - 4y^2 - 16z^2 = 16$

A) La gráfica es:

B)Una de las trazas es la Hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$:

C) En la gráfica se forman elipses paralelas al plano:

2.

Dada la ecuación general

$$9x^2 - 4y^2 + 36z^2 = 36$$

llévela a una de las formas estándar con el fin de poder identificar el nombre de la superficie entre las siguientes opciones.

Seleccione una:

- a. Paraboloide con eje horizontal, paralelo al eje x.
- b. Hiperboloide de un manto con eje horizontal, paralelo al eje y.
- c. Ninguna de las otras respuestas es correcta.
- d. Elipsoide con eje vertical, paralelo al eje z.
- e. Hiperboloide de dos mantos con eje horizontal, paralelo al eje y.

3.

Dada la ecuación general

$$-4x^2 - 9y^2 + z^2 + 8x - 72y + 2z = 163$$

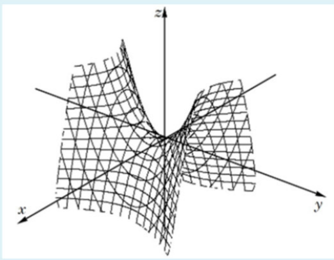
llévela a una de las formas estándar con el fin de poder identificar el nombre de la superficie entre las siguientes opciones.

Seleccione una:

- a. Elipsoide con eje mayor vertical, paralelo al eje z.
- b. Cono con eje horizontal, paralelo al eje y. .
- c. Paraboloide elíptico con eje horizontal, paralelo al eje x.
- d. Ninguna de las otras respuestas es correcta.
- e. Hiperboloide de dos mantos con eje vertical, paralelo al eje z.

4.

La siguiente figura muestra la gráfica de una superficie cuadrática en el espacio. Seleccione la ecuación correspondiente



Seleccione una:

- a. $x = \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{3}$
- b. $z = \frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{2}$
- c. Ninguna de las otras respuestas es correcta
- d. $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$
- e. $z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3}$

5.

Determine la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al girar la curva que se encuentra en el plano xy

$$y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{36}}$$

alrededor del eje x. Luego diga que clase de superficie representa.

Seleccione una:

- a. Una esfera de radio 6.
- b. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- c. Un hiperboloide con eje sobre el eje "x".
- d. Un cono circular recto con eje sobre el eje "y".
- e. Un elipsoide con eje mayor sobre el eje "x".

6.

Hallar la ecuación para la superficie de revolución generada al girar alrededor del eje y, la curva que está en el plano xy.

$$x = 4\sqrt{y}$$

Seleccione una:

- a. $y^2 + z^2 = 16x^2$
- b. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- c. $x^2 + y^2 = z^2$
- d. $x^2 + z^2 = 16y$
- e. $x^2 + z^2 = 16y^2$

7.

a) Dada la curva que está en el plano xy

$$y = x^3$$

se puede girar respecto a :

el eje x & el eje y ✔

b) La ecuación de la superficie de revolución generada al girar la curva dada en el inciso a) respecto al eje ***y*** es

$$x^2 + z^2 = y$$

Verdadero ✖

c) La ecuación de la superficie de revolución generada al girar la curva dada en el inciso a) respecto al eje ***x*** es

$$z^2 + y^2 = x^6$$

Verdadero ✔

8.

Hallar la ecuación para la superficie de revolución generada al girar en torno del eje x, la curva de.

$$2z = \sqrt{4 - x^2}$$

Seleccione una:

- a. Ninguna de las otras es correcta.
- b. $y^2 + z^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$
- c. $x^2 + y^2 = 2 - z^2$
- d. $4x^2 - y^2 = z^2$
- e. $y^2 + z^2 = 4 - x^2$