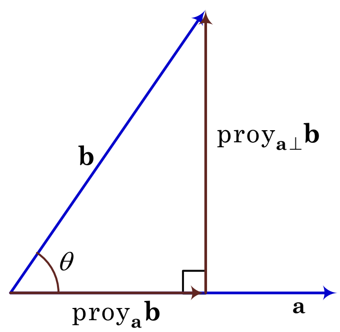
6.7 Distancias en el espacio

OBJETIVOS

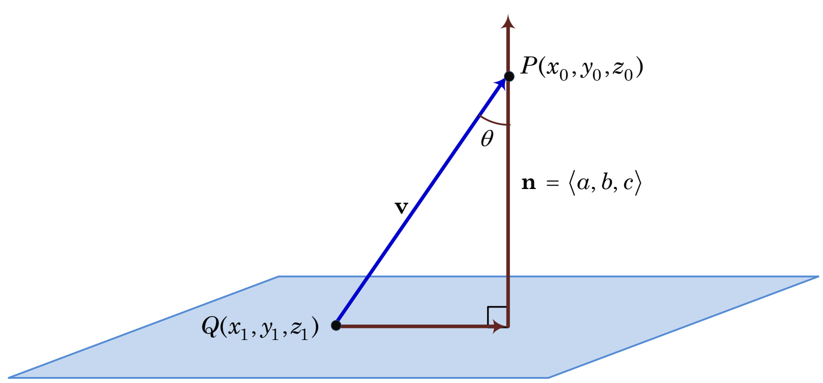
- Encontrar la distancia de un punto a un plano.
- Encontrar la distancia de una recta a un plano cuando no se intersecan.
- Encontrar la distancia entre dos planos paralelos.
- Encontrar la distancia de un punto a una recta.
- Encontrar la distancia entre dos rectas paralelas.
- Encontrar la distancia más corta entre dos rectas oblicuas.

La idea principal que se utiliza para encontrar cualquier distancia en el espacio, consiste en construir un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa sea un vector que va entre los dos objetos, el cateto adyacente o el cateto opuesto representan la distancia mas corta entre los dos objetos se calculan obteniendo la longitud de la proyección o proyección perpendicular según sea el caso



Distancia de un punto a un plano

Aunque se puede dar una fórmula para cada problema de distancia, es mejor utilizar el sentido común para construir el triángulo sugerido al empezar esta sección.



Para calcular la distancia de un punto a un plano se sugiere el procedimiento siguiente

1. Obtenga las coordenadas de un punto cualquiera Q en el plano.
2. Obtenga el vector **b** que va del punto P al punto Q.
3. Obtenga el coseno del ángulo entre el vector **v** y el vector normal al plano **n.**

4. La distancia del punto al plano es el valor absoluto de la longitud del vector **v** multiplicada por el coseno del ángulo.

El procedimiento propuesto puede tener variantes y será criterio del estudiante el procedimiento que se utilice.

Ejemplo 1: Distancia de un punto a un plano

Encuentre la distancia del punto $P(3,-4,-2)$ al plano cuya ecuación es $2x - 4y + z = 4$

Solución

Primero encontremos un punto cualquiera en el plano, para ello le damos valores a dos de las variables y despejamos la otra. Si $x = 0$ y $y = 0$ se obtiene que $z = 4$. Entonces un punto en el plano es $Q(0,0,4)$

El vector que va de P a Q es

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \langle 0-3, 0-(-4), 4-(-2)\rangle \\ &= \langle -3,4,6\rangle\end{aligned}$$

El vector normal al plano es

$$\mathbf{n} = \langle 2,-4,1\rangle$$

Ahora se calcula el coseno del ángulo entre el vector **v** y el vector normal al plano **n.**

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|}$$

La distancia será el valor absoluto del modulo del vector **v** por el coseno del ángulo

$$\begin{aligned}D &= |\mathbf{v}|\cos\theta = |\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \\ &= \frac{\langle -3,4,6\rangle\cdot\langle 2,-4,1\rangle}{|\langle 2,-4,1\rangle|} \\ &= \frac{-6-16+6}{\sqrt{4+16+1}} = \frac{-16}{\sqrt{21}}\end{aligned}$$

La respuesta negativa se debe a que el ángulo entre los vectores es mayor de 90º. Finalmente, la distancia será el valor absoluto del valor obtenido.

$$|D| = \left|\frac{-16}{\sqrt{21}}\right| = \frac{16}{\sqrt{21}}$$

Ejemplo 2: Distancia de una recta a un plano

Encuentre la distancia de la recta $x - 3 = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$ al plano $3x - 5y - 6z = 8$

Solución

Esta distancia tiene sentido si la recta no interseca al plano. El punto de intersección se encuentra escribiendo las ecuaciones paramétricas de la recta y sustituyendo en la ecuación del plano. Si existe un único valor del parámetro, se intersecan. Si no hay parámetro no hay intersección.

Las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$x = t + 3$$
$$y = 3t + 1$$
$$z = -2t - 1$$

Sustituyendo en la ecuación del plano

$$\begin{aligned} 3(t+3) - 5(3t+1) - 6(-2t-1) &= 8 \\ 3t + 9 - 15t - 5 + 12t + 6 &= 8 \\ 10 &= 8 \end{aligned}$$

La ecuación es inconsistente, y la ecuación no tiene solución. La recta y el plano no se intersecan.

La distancia de una recta a un plano se calcula de la misma forma que la distancia de un punto a un plano, con la única diferencia que primero hay que encontrar un punto P sobre la recta.

Haciendo $t = 0$ se obtiene el punto sobre la recta $P(3,1,-1)$.

Un punto cualquiera sobre el plano $3x - 5y - 6z = 8$ es $Q(0,2,-3)$

El vector que va de P a Q es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \langle 0-3, 2-1, -3-(-1) \rangle \\ &= \langle -3,1,-2 \rangle \end{aligned}$$

El vector normal al plano es

$$\mathbf{n} = \langle 3,-5,-6 \rangle$$

Ahora se calcula el coseno del ángulo entre el vector **v** y el vector normal al plano **n.**

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|}$$

La distancia será el valor absoluto del módulo del vector **v** por el coseno del ángulo

$$\begin{aligned} D &= |\mathbf{v}|\cos\theta = |\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \\ &= \frac{\langle -3,1,-2\rangle\cdot\langle 3,-5,-6\rangle}{|\langle 3,-5,-6\rangle|} \\ &= \frac{-9-5+12}{\sqrt{9+25+36}} = \frac{-2}{\sqrt{70}} \end{aligned}$$

La respuesta negativa se debe a que el ángulo entre los vectores es mayor de 90º. Finalmente, la distancia será el valor absoluto del valor obtenido.

$$|D| = \left|\frac{-2}{\sqrt{70}}\right| = \frac{2}{\sqrt{70}}$$

Ejemplo 3: Distancia entre dos planos paralelos

Encuentre la distancia entre los planos paralelos $6x - 10y - 12z = 18$ y $3x - 5y - 6z = 10$

Solución

Parece claro que, si dos planos no son paralelos, estos se intersecan en una recta, como se ilustro en la sección anterior. Ahora, dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos

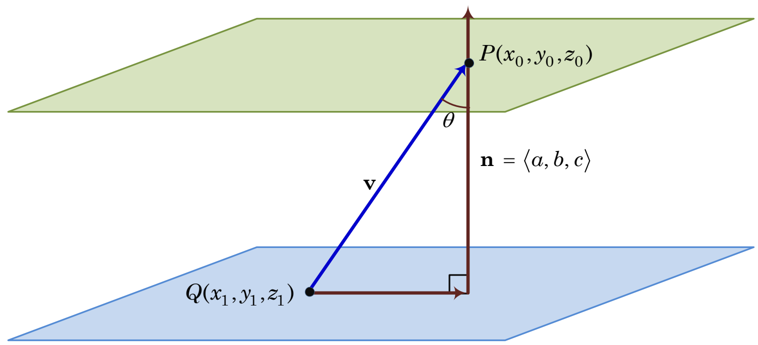
El vector normal al plano $6x - 10y - 12z = 18$ es $\mathbf{n} = \langle 6,-10,-12\rangle$

El vector normal al plano $3x - 5y - 6z = 10$ es $\mathbf{m} = \langle 3,-5,-6\rangle$

Estos vectores son paralelos si

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= k\mathbf{n} \\ \langle 6,-10,-12\rangle &= k\langle 3,-5,-6\rangle \\ 6 &= 3k \rightarrow k = 2 \\ -10 &= -5k \rightarrow k = 2 \\ -12 &= -6k \rightarrow k = 2 \end{aligned}$$

Como el valor de k es único, los vectores son paralelos y los planos también lo son. La distancia entre dos planos paralelos se calcula de la misma forma que la distancia de un punto a un plano, como en el ejemplo 1



Un punto del plano $6x - 10y - 12z = 18$ se puede encontrar haciendo $y = 0$, $z = 0$ y despejando x

$$\begin{aligned} 6x &= 18 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

El punto en el plano es $Q(3,0,0)$

De forma similar un punto en el plano $3x - 5y - 6z = 10$ es $P(0,-2,0)$

El vector que va de P a Q es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \langle 3-0, 0-(-2), 0-0\rangle \\ &= \langle 3,2,0\rangle \end{aligned}$$

El vector normal al plano es

$$\mathbf{n} = \langle 3,5,-6\rangle$$

Ahora se calcula el coseno del ángulo entre el vector **v** y el vector normal al plano **n.**

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|}$$

La distancia será el valor absoluto del módulo del vector **v** por el coseno del ángulo

$$\begin{aligned} D &= |\mathbf{v}|\cos\theta = |\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \\ &= \frac{\langle 3,2,0\rangle\cdot\langle 3,5,-6\rangle}{|\langle 3,5,-6\rangle|} \\ &= \frac{9+10-0}{\sqrt{9+25+36}} = \frac{19}{\sqrt{70}} \end{aligned}$$

La respuesta negativa se debe a que el ángulo entre los vectores es mayor de 90º. Finalmente, la distancia será el valor absoluto del valor obtenido.

$$|D| = \left|\frac{19}{\sqrt{70}}\right| = \frac{19}{\sqrt{70}}$$

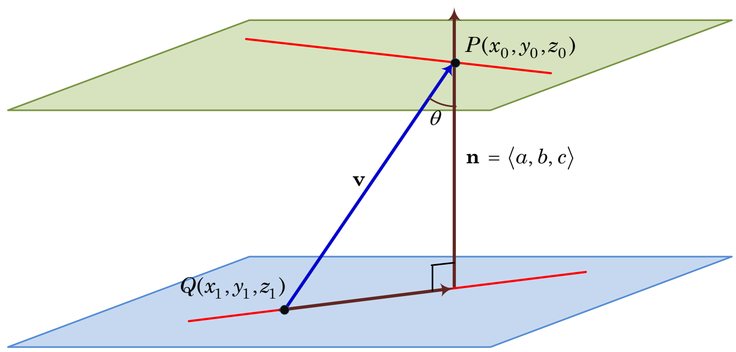
Ejemplo 4: Distancia entre dos rectas oblicuas

Encuentre la distancia entre las rectas oblicuas

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = z+1 \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{4} = y+2 = \frac{z+3}{-3}$$

Solución

La distancia entre dos rectas oblicuas es la misma que la distancia entre los planos que las contienen, como se muestra en la siguiente figura



La principal diferencia en este caso es que no se conoce el vector **n**. Este vector tiene la característica de ser perpendicular a las dos rectas y se encuentra por el producto vectorial de los vectores directores de la recta.

El vector director de la primera recta es $\mathbf{v} = \langle 3, -1, 1\rangle$

El vector director de la segunda recta es $\mathbf{w} = \langle 4, 1, -3\rangle$

El producto vectorial de los vectores da un vector normal a los planos paralelos

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = [3-1]\mathbf{i} - [-9-4]\mathbf{j} + [3+4]\mathbf{k}$$

$$= 2\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

Un punto en la primera recta es $P(0,1,-1)$ y un punto en la segunda recta es $Q(1,-2,-3)$

El vector que va de P a Q es

$$\mathbf{v} = \langle 1-0, -2-1, -3-(-1)\rangle$$
$$= \langle 1, -3, -2\rangle$$

El vector normal al plano es

$$\mathbf{n} = \langle 2, 13, 7\rangle$$

Ahora se calcula el coseno del ángulo entre el vector **v** y el vector normal al plano **n.**

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|}$$

La distancia será el valor absoluto del módulo del vector **v** por el coseno del ángulo

$$D = |\mathbf{v}|\cos\theta = |\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{\langle 1,-3,-2\rangle\cdot\langle 2,13,7\rangle}{|\langle 2,13,7\rangle|}$$

$$= \frac{2-39-14}{\sqrt{4+169+49}} = \frac{-51}{\sqrt{222}}$$

La respuesta negativa se debe a que el ángulo entre los vectores es mayor de 90º. Finalmente, la distancia será el valor absoluto del valor obtenido.

$$|D| = \left|\frac{-51}{\sqrt{222}}\right| = \frac{51}{\sqrt{222}}$$

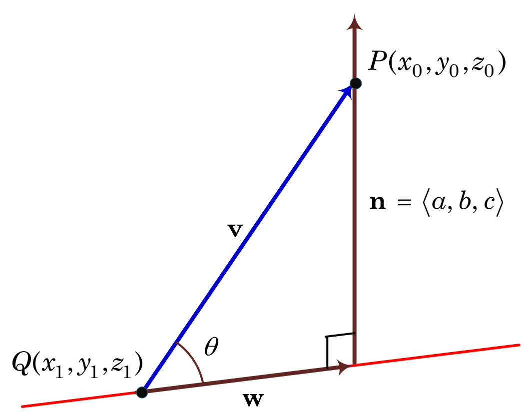
Ejemplo 5: Distancia de un punto a una recta

Encuentre la distancia del origen a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = 1-t \qquad y = 2+2t \qquad z = 6-4t$$

Solución

La distancia de un punto a una recta se ilustra en la figura siguiente



El problema en este caso es que no hay una forma sencilla de conseguir el vector **n** ya que solo se conoce el vector director de la recta, y existen infinitos vectores perpendiculares a ella.

La distancia se puede encontrar utilizando el producto vectorial para hallar el seno del ángulo

$$|\mathbf{v}\times\mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}|\operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}$$

La distancia del punto a la recta se encuentra al multiplicar la longitud del vector **v** por el seno del ángulo

$$D = |\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta = |\mathbf{v}|\frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|}{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}$$

$$D = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|}{|\mathbf{w}|}$$

La recta tiene ecuaciones paramétricas

$$x = 1 - t \qquad y = 2 + 2t \qquad z = 6 - 4t$$

Un punto en la recta es $Q(1,2,6)$ y el otro punto es el origen $P(0,0,0)$

El vector que va de P a Q es

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \langle 1-0, 2-0, 6-0\rangle \\ &= \langle 1,2,6\rangle\end{aligned}$$

El vector director de la recta es

$$\mathbf{w} = \langle -1,2,-4\rangle$$

Ahora se calcula el producto vectorial de los vectores

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 6\\ -1 & 2 & -4\end{vmatrix} = -20\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = \langle -20,-2,4\rangle$$

La distancia del punto a la recta es entonces

$$\begin{aligned}D &= \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|}{|\mathbf{w}|} = \frac{\sqrt{(-20)^2 + (-2)^2 + 4^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-4)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{420}}{\sqrt{21}} = \sqrt{20} \\ &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

Ejercicios sobre distancias

1.

Usando vectores, encuentre la distancia del punto $(-3,5,5)$ al plano

$$3x - 5y + 6z = 5$$

Respuesta:

2.

Usando vectores, encuentre la distancia del origen del sistema de coordenadas a la recta

$$x = -3 + 4t; y = 4 - 3t; z = 2 - 3t$$

Respuesta:

3.

Usando vectores, determine la distancia entre las rectas dadas:

$$L1 : x = -4 + 2t; y = 3 - 2t; z = -1 + 3t$$

$$L2 : \frac{x}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$$

Respuesta:

4.

Usando vectores, determine la distancia entre las rectas oblicuas:

$$L1 : x = 3 - 4t; y = -5 - t; z = 3 + 3t$$

$$L2 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-4}$$

Respuesta:

5.

Usando vectores, determine la distancia entre los planos paralelos:

$$2x - 5y + 3z = -9; \; 4x - 10y + 6z = -3$$

Respuesta:

7.

Usando vectores, determine la distancia entre el plano

$$x + 3y - 5z = -2$$

y la recta paralela

$$L : \frac{x-6}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{1}$$

Respuesta:

8.

Usando vectores, encuentre la distancia entre las rectas paralelas

$$L_1 : \begin{cases} x = -5 - 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

$$L_2 : \frac{x-5}{-3} = \frac{y+6}{3} = \frac{z-4}{-3}$$

Respuesta:

9.

Usando vectores, encuentre la distancia del punto $(3, 7, 7)$ al plano que pasa por el punto $(1, 2, 2)$ y es paralelo al plano xy.

Respuesta: