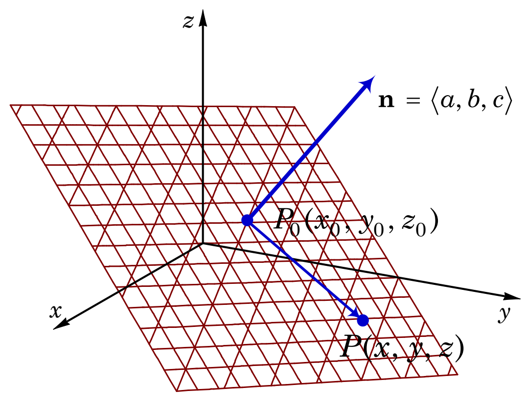
6.6 Planos en el espacio

OBJETIVOS

- Encontrar la ecuación vectorial y la ecuación general de planos en el espacio.
- Resolver problemas de rectas y planos.
- Encontrar la recta de intersección de dos planos, el punto de intersección de un plano con una recta.

Planos en el espacio

Si un plano en el espacio queda determinado por un punto conocido en el plano y por un vector que sea perpendicular al plano, como se muestra en la figura siguiente



Si $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ es el vector de posición de un punto cualquiera en un plano, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ es el vector de posición de un punto conocido que está en el plano y $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ es un vector perpendicular al plano. La ecuación vectorial del plano está dada por

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

Al sustituir los vectores y desarrollar el producto punto, se obtiene la ecuación general del plano,

$$\langle a,b,c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

El término en el lado derecho de la ecuación anterior es una constante, si se hace la sustitución

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Se obtiene la ecuación general del plano

$$ax + by + cz = d$$

En donde d es una constante y el vector normal al plano es $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$

Ejemplo 1: Ecuación del plano que pasa por 3 puntos

Encuentre la ecuación del plano que contiene a los puntos $(1,2,2)$, $(-2,2,0)$ y $(3,-4,-2)$

Solución

Para resolver este problema primero se encuentran dos vectores en el plano utilizando los tres puntos dados, con estos dos vectores se utiliza el producto vectorial para encontrar un vector normal al plano.

Calculando los dos vectores en el plano

$$\mathbf{v} = \langle -2-1, 2-2, 0-2 \rangle = \langle -3, 0, -2 \rangle$$

$$\mathbf{w} = \langle 3-1, -4-2, -2-2 \rangle = \langle 2, -6, -4 \rangle$$

El producto vectorial de los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ nos da un vector perpendicular al plano ya que ambos vectores están sobre el plano

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \end{vmatrix} = [0-10]\mathbf{i} - [12+4]\mathbf{j} + [15-0]\mathbf{k}$$

$$= -10\mathbf{i} - 16\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$

La ecuación del plano es

$$ax + by + cz = d$$

$$-10x - 16y + 15z = d$$

Para encontrar el valor de la constante d, utilizamos cualquiera de los puntos en el plano, utilizando el punto $(1,2,2)$

$$-10(1) - 16(2) + 15(2) = d$$

$$-12 = d$$

Entonces la ecuación del plano es

$$-10x - 16y + 15z = -12$$

$$10x + 16y - 15z = 12$$

Ejemplo 2: Ecuación del plano que contiene dos rectas

Determine el punto de intersección de las rectas y le ecuación del plano que determina dichas rectas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}; \quad x-2 = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{-4}$$

Solución

Para encontrar el punto de intersección de dos rectas en el espacio se igualan las componentes en x, y y z y se resuelven las ecuaciones resultante, luego se comprueba que el punto resultante satisface las ecuaciones simétricas de cada recta. Si las rectas no se intersecan es porque son paralelas o bien son oblicuas.

La ecuaciones paramétricas de la primera recta son

$$x = 2t + 1, \quad y = 3t + 2, \quad z = 4t + 3$$

La ecuaciones paramétricas de la segunda recta son

$$x = r + 2, \quad y = 2r + 4, \quad z = -4r - 1$$

Igualando las componentes en x, y y z

$$2t + 1 = r + 2$$

$$3t + 2 = 2r + 4$$

$$4t + 3 = -4r - 1$$

Despejando r en la primera ecuación $r = 2t - 1$, sustituyendo en la segunda y despejando t

$$3t + 2 = 2(2t - 1) + 4$$

$$3t - 4t = -2 + 4 - 2$$

$$t = 0$$

Por lo que, de las primeras dos ecuaciones se obtiene que $t = 0$ y $r = -1$. Al comprobar en la tercera ecuación

$$4t + 3 = -4r - 1$$

$$4(0) + 3 = -4(-1) - 1$$

$$3 = 3$$

Como el sistema de ecuaciones tiene solución única, las rectas se intersectan. Sustituyendo t en las ecuaciones paramétricas de la primera recta

$$x = 2t + 1 = 1$$

$$y = 3t + 2 = 2$$

$$z = 4t + 3 = 3$$

El punto de intersección de las rectas es $(1,2,3)$

Como el plano contiene a las dos rectas, contiene al punto de intersección y a los dos vectores directores de las rectas. el vector normal al plano estará dado entonces por el producto vectorial de los vectores directores de las rectas

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + \mathbf{k} = \langle -20,12,1 \rangle$$

La ecuación del plano es

$$-20x + 12y + z = d$$

Sustituyendo el punto $(1,2,3)$ y despejando d

$$-20(1) + 12(2) + (3) = d$$

$$d = 7$$

La ecuación del plano es

$$-20x + 12y + z = 7$$

$$20x - 12y - z + 7 = 0$$

Ejemplo 3: Intersección de dos planos y plano que contiene a la recta de intersección

Encontrar la ecuación del plano que pasa por el origen y que contiene a la recta de intersección de los planos $2x - z = 1$ y $4x + y + 8z = 10$.

Solución

Primero se encuentra la ecuación de la recta de intersección de los planos $2x - z = 1$ y $4x + y + 8z = 10$. Esta recta es la solución del sistema de ecuaciones

$$2x - z = 1$$
$$4x + y + 8z = 10$$

El sistema debe tener infinitas soluciones si los planos se intersectan, o ninguna solución, en cuyo caso los planos son paralelos. Despejando z en la primera ecuación se tiene $z = 2x - 1$. Sustituyendo en la segunda ecuación y despejando y

$$4x + y + 8(2x - 1) = 10$$
$$20x + y - 8 = 10$$
$$y = -20x + 18$$

De donde la solución del sistema de ecuaciones es:

$$x = x$$
$$y = -20x + 18$$
$$z = 2x - 1$$

Donde x es una variable que puede tomar cualquier valor. Al hacer la sustitución $x = t$, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección

$$x = t$$
$$y = -20t + 18$$
$$z = 2t - 1$$

A partir de las ecuaciones paramétricas de la recta se tiene que el vector director de la misma es $\mathbf{v} = \langle 1, -20, 2 \rangle$ y un punto sobre ella es $(0, 18, -1)$. Tanto el vector como el punto están en el plano cuya ecuación se busca.

Otra forma de obtener el vector director de la recta de intersección es por medio del producto vectorial, ya que este vector debe ser perpendicular a los dos vectores normales a los planos,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = (0 + 1)\mathbf{i} - (16 + 4)\mathbf{j} + (2 - 0)\mathbf{k} = \mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = \langle 1, -20, 2 \rangle$$

Para obtener otro vector $\mathbf{w}$ en el plano buscado, se restan los puntos $(0, 18, -1)$ y $(0, 0, 0)$, ya que ellos están en el plano

$$\mathbf{w} = (0, 18, -1) - (0, 0, 0) = \langle 0, 18, -1 \rangle$$

El vector normal se obtiene efectuando el producto vectorial de los dos vectores en el plano $\mathbf{v} = \langle 1, -20, 2 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 0, 18, -1 \rangle$

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -20 & 2 \\ 0 & 18 & -1 \end{vmatrix} = -16\mathbf{i} + \mathbf{j} + 18\mathbf{k} = \langle -16, 1, 18 \rangle$$

La ecuación del plano es

$$-16x + y + 18z = d$$

Como el plano pasa por el punto $(0,0,0)$, se sustituye $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y se despeja d, obteniéndose que $d = 0$. Por lo que la ecuación del plano es

$$-16x + y + 18z = 0$$

La figura siguiente muestra la gráfica de los dos planos $2x - z = 1$ y $4x + y + 8z = 10$, en colores azul y verde y en color café el plano cuya ecuación se ha encontrado, observe como éste plano pasa por el origen y por la recta de intersección de los planos dados