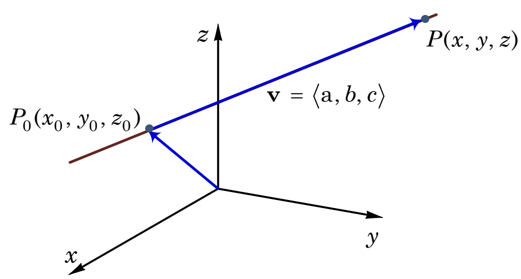
6.5 Rectas en el espacio

OBJETIVOS

- Encontrar la ecuación vectorial de una recta, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas dados dos puntos de la recta.
- Determinar si dos rectas son paralelas, se intersecan en un punto o bien si las rectas son oblicuas.
- Encontrar el punto de intersección de dos rectas, cuando estas se intersecan.

Rectas en el espacio

Una recta en el espacio está determinada por un punto de la recta $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y por un vector que sea paralelo a la recta $\mathbf{v} = \langle \mathrm{a}, b, c\rangle$ como se muestra en la figura siguiente



Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto de la recta y $\mathbf{v} = \langle \mathrm{a}, b, c\rangle$ es un vector paralelo a la recta, entonces la **ecuación vectorial** de la recta puede escribirse como

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + t\langle a, b, c\rangle$$

Desarrollando la suma en el lado derecho e igualando las componentes se obtienen las **ecuaciones paramétricas** de una recta

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt, \qquad z = z_0 + ct$$

Despejando t en cada una de las ecuaciones anteriores e igualando se obtienen las **ecuaciones simétricas de la recta**

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Rectas paralelas

Dos rectas en el espacio son paralelas si sus vectores directores son paralelos, es decir

$$\mathbf{v} = k\mathbf{w}$$

$$\langle v_1, v_2, v_3\rangle = k\langle w_1, w_2, w_3\rangle$$

Rectas que se intersecan

Si dos rectas no son paralelas puede ser que se intersequen en un punto. Este punto debe satisfacer las ecuaciones de ambas rectas.

Rectas oblicuas

Si dos rectas en el espacio no son paralelas y no se intersecan, se dice que son rectas oblicuas. Las rectas oblicuas se encuentran en planos paralelos, pero no son rectas paralelas.

Ejemplo 1: Ecuaciones de la recta que pasa por dos puntos

a. Encuentre la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas, las ecuaciones simétricas; de la recta que pasa por los puntos $(4, -2, 3)$ y $(-3, 3, 0)$. Dibuje su gráfica.

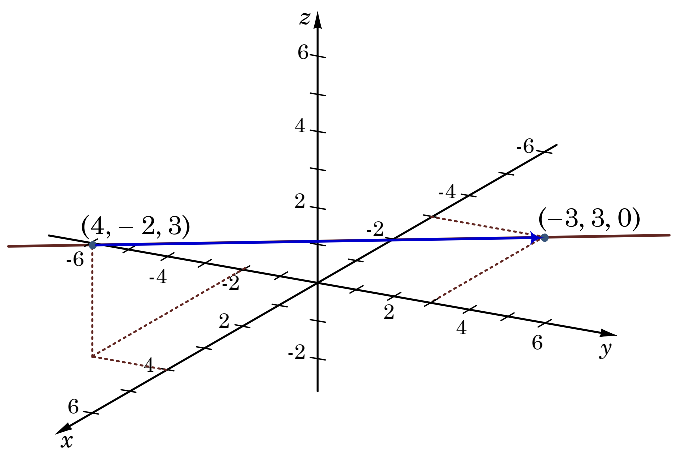
b. Encuentre el punto en donde la recta del inciso anterior interseca al plano yz

Solución

a. La siguiente figura muestra los dos puntos por donde pasa la recta. Se toma al punto $(4, -2, 3)$ como punto inicial.

Un vector $\mathbf{v}$ paralelo a la recta se obtiene a partir de los puntos dados

$$\mathbf{v} = \langle -3-4, 3-(-2), 0-3\rangle = \langle -7, 5, -3\rangle$$



La ecuación vectorial de la recta es

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + t\langle a, b, c\rangle$$

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 4, -2, 3\rangle + t\langle -7, 5, -3\rangle$$

Para encontrar las ecuaciones paramétricas se multiplica t por el vector director de la recta y se desarrolla la suma de vectores, finalmente se igualan las componentes, obteniéndose

$$x = 4 - 7t$$

$$y = -2 + 5t$$

$$z = 3 - 3t$$

Para obtener las ecuaciones simétricas se despeja t en las ecuaciones paramétricas y se igualan las 3 expresiones para t

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x-4}{-7} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-3}{-3}$$

b. para encontrar el punto en donde la recta corta al plano *yz,* hay que observar que en ese punto el valor de $x = 0$. Sustituyendo este valor en las ecuaciones paramétricas de la recta podemos encontrar los valores de *y* y *z*.

$$x = 4 - 7t$$
$$y = -2 + 5t$$
$$z = 3 - 3t$$

$$0 = 4 - 7t$$
$$t = \frac{4}{7}$$
$$y = -2 + 5t = -2 + 5\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{6}{7}$$
$$z = 3 - 3t = 3 - 3\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{9}{7}$$

La recta interseca al plano *yz* en el punto

$$\left(0, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$$

Ejemplo 2: Intersección de dos rectas

Determine si las rectas dadas son paralelas, se intersecan en un punto o bien si son oblicuas

$$\frac{x-1}{-2} = y - 4 = z \quad \text{y} \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$$

Solución

Primero debemos establecer si son o no paralelas, para ello encontramos sus vectores directores y los comparamos. Llamaremos **v** al vector director de la primera recta y **w** al de la segunda. Estos vectores se obtienen de los denominadores en las ecuaciones simétricas de las rectas

$$\mathbf{v} = \langle -2,1,1 \rangle$$
$$\mathbf{w} = \langle -3,4,-1 \rangle$$

Estos vectores son paralelos si

$$\mathbf{v} = k\mathbf{w}$$
$$\langle -2,1,1 \rangle = k\langle -3,4,-1 \rangle$$

Igualando las componentes de los vectores se tiene

$$-2 = -3k$$
$$1 = 4k$$
$$1 = -k$$

Como el valor de *k* no es único los vectores no son paralelos y por lo tanto las rectas no son paralelas.

Para establecer si se intersecan, hay que escribir las ecuaciones paramétricas de cada recta, teniendo el cuidado de colocar un parámetro diferente. Luego igualar los valores de *x, y* y *z*. Si se obtiene un valor único para estos valores, las rectas se intersecan. De otra manera no se intersecan.

Las ecuaciones paramétricas de la primera recta son

$$\frac{x-1}{-2} = y-4 = z$$

$$t = \frac{x-1}{-2} \qquad t = y-4 \qquad t = z$$

$$x = 1-2t \qquad y = 4+t \qquad z = t$$

Para la segunda recta son

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$$

$$s = \frac{x-2}{-3} \qquad s = \frac{y-1}{4} \qquad s = \frac{z-2}{-1}$$

$$x = 2-3s \qquad y = 1+4s \qquad x = 2-s$$

Ahora se procede a igualar los valores de x, y y z; para formar un sistema de 3 ecuaciones con dos incógnitas

$$1-2t = 2-3s$$

$$4+t = 1+4s$$

$$t = 2-s$$

Sustituyendo la tercera ecuación en la primera y despejando s

$$1-2(2-s) = 2-3s$$

$$1-4+2s+3s = 2$$

$$5s = 5$$

$$s = 1$$

$$t = 2-s = 2-1 = 1$$

Verificando en la segunda ecuación

$$4+t = 1+4s$$

$$4+1 = 1+4(1)$$

$$5 = 5$$

Como se satisfacen las tres ecuaciones, el sistema tiene solución única y el punto de intersección es

$$x = 1-2t = 1-2(1) = -1$$

$$y = 4+t = 4+1 = 5$$

$$z = t = 1$$

Se intersecan en el punto $(-1,5,1)$