6.4 El producto vectorial

OBJETIVOS

- Calcular el producto vectorial de dos vectores.
- Calcular el área del paralelogramo formado por dos vectores.
- Calcular el triple producto escalar.
- Calcular el volumen del paralelepípedo formado por 3 vectores.

El producto vectorial

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son dos vectores en el espacio, el producto vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un vector perpendicular a los vectores **a** y **b** y se obtiene de la forma siguiente

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \\ &= \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - \mathrm{a}_1 b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle\end{aligned}$$

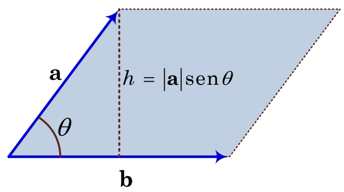
Si los vectores **a** y **b** son paralelos el producto vectorial es igual al vector cero, de hecho, esta es una forma de mostrar que dos vectores son paralelos

Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ entonces los vectores son paralelos.

Otra propiedad importante del producto vectorial es la siguiente

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta$$

Esta propiedad se puede utilizar para calcular el ángulo entre dos vectores o bien para calcular el área del paralelogramo formado por dos vectores como se muestra en la figura siguiente



El área del paralelogramo es

$$\begin{aligned} A &= bh \\ &= |\mathbf{b}||\mathbf{a}|\operatorname{sen}\theta \\ &= |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \end{aligned}$$

Ejemplo 1: Producto vectorial

Dados los vectores

$$\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Calcule: **i.** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ **ii.** $\mathbf{a} \times \mathbf{a}$

Solución

i. Utilizando el determinante de una matriz de 3 por 3 para calcular el producto vectorial

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -5 \end{vmatrix} \\
&= [(3)(-5) - (1)(-2)]\mathbf{i} - [(-4)(-5) - (1)(5)]\mathbf{j} + [(-4)(-2) - (3)(5)]\mathbf{k} \\
&= -13\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\
&= \langle -13, -15, 0 \rangle
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{0} \\
&= \langle 0, 0, 0 \rangle
\end{aligned}$$

Claramente el determinante es igual a cero ya que tiene dos filas iguales.

Ejemplo 2: Área del paralelogramo

Los puntos $A(6,-2,6)$, $B(3,2,7)$, $C(6,0,0)$ y $D(3,4,1)$ forman un paralelogramo. Calcule su área

Solución

Para resolver este problema hay que calcular el vector que va del punto A al punto B y el vector que va del punto A al punto D. Una vez que tengamos los vectores se calcula el producto vectorial y finalmente su módulo.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= B - A = \langle 3-6, 2-(-2), 7-6 \rangle \\
&= \langle -3, 4, 1 \rangle \\
\overrightarrow{AD} &= D - A = \langle 3-6, 4-(-2), 1-6 \rangle \\
&= \langle -3, 6, -5 \rangle
\end{aligned}$$

El producto vectorial de los vectores es

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & -5 \end{vmatrix} \\
&= [(4)(-5) - (1)(6)]\mathbf{i} - [(-3)(-5) - (1)(-3)]\mathbf{j} + [(-3)(6) - (4)(-3)]\mathbf{k} \\
&= -26\mathbf{i} - 18\mathbf{j} - 6\mathbf{k}
\end{aligned}$$

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial

$$\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{(-26)^2 + (-18)^2 + (-6)^2}$$
$$= \sqrt{1036}$$
$$= 2\sqrt{259}$$

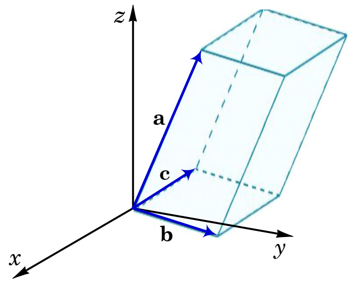
El triple producto escalar

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ son tres vectores en el espacio, se define el triple producto escalar de los tres vectores como

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

El triple producto escalar se puede utilizar para calcular el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas los vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, ya que el volumen está dado por el valor absoluto del triple producto escalar

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$



Ejemplo 3: Volumen de un paralelepípedo

Utilice el triple producto escalar para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas los vectores $\mathbf{a} = \langle -3,4,1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3,6,-5 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 5,2,8 \rangle$

Solución

El volumen del paralelepípedo está dado por el valor absoluto del triple producto escalar

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -3 & 6 & -5 \\ 5 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -3[(6)(8) - (-5)(2)] - (4)[(-3)(8) - (-5)(5)] + (1)[(-3)(2) - (6)(5)]$$
$$= -3[48 + 10] - (4)[-24 + 25] + (1)[-6 - 30]$$
$$= -3(58) - 4(1) + (1)(-36)$$
$$= -214$$

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |-214|$$
$$= 214$$

Ejercicios

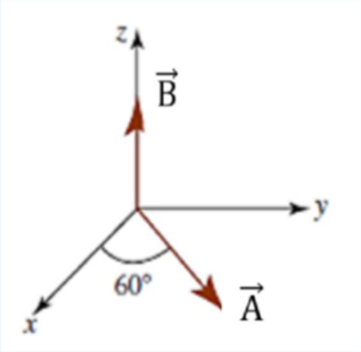
1.

El vector $\vec{C}$ viene definido de la siguiente manera: $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, donde $\vec{A} =< 1, -4, 2 >$ y $\vec{B} =< 2, -1, 0 >$. Calcule coseno director que forma el vector $\vec{C}$ con el eje " y ".

Respuesta:

2.

El vector $\vec{A}$ yace en el plano xy y el vector $\vec{B}$ se ubica sobre el eje z positivo como se muestra en la figura. Sus magnitudes son respectivamente 2 y 3.



Encuentre $\vec{A} X \vec{B} \bullet j$

Seleccione una:

- a. -3.00.
- b. 3.00.
- c. -1.50.
- d. 5.20.
- e. Ninguna de las otras opciones es correcta.

3.

Dados los vectores $\vec{A} =< 2, a, -4 >$ y $\vec{B} =< 0, 2, 2 >$, el valor de la constante a para que el vector resultante de $\vec{A} \times \vec{B}$ sea perpendicular al eje x es:

Seleccione una:

- a. a = 4
- b. a = -4
- c. a = -8
- d. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- e. a = 0

4.

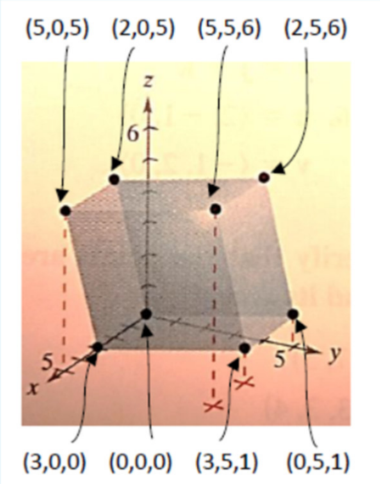
Los puntos $A(6, 9, 5)$ $B(5, 7, 2)$, $C(0, 3, 2)$ y $D(1, 5, 5)$ son los vértices del paralelogramo $ABCD$. Encuentre el área del paralelogramo.

Seleccione una:

- a. $9\sqrt{5}$
- b. $2\sqrt{10}$
- c. Todas las otras respuestas son incorrectas.
- d. $5\sqrt{10}$
- e. $3\sqrt{5}$

5.

Si el volumen de un paralelepípedo es área de la base por altura, encuentre la altura si la base del paralelepípedo que se muestra es el paralelogramo que tiene como vértices $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(0,5,1)$ y $(3,5,1)$



Seleccione una:

- a. $\frac{15}{\sqrt{49}}$
- b. $\frac{75}{\sqrt{234}}$
- c. $\frac{65}{\sqrt{234}}$
- d. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- e. $\frac{65}{\sqrt{225}}$