6.3 El producto escalar

OBJETIVOS

- Calcular el producto escalar de dos vectores.
- Calcular el ángulo entre dos vectores.
- Comprobar si dos vectores son perpendiculares.
- Calcular los cosenos directores de un vector
- Calcular las proyecciones y componentes vectoriales.

El producto escalar

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son dos vectores en el espacio, el producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se define como

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1, b_2, b_3 \rangle \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned}$$

Observe que el producto escalar no da como resultado un vector. El resultado es un número

Ejemplo 1: Producto escalar

Dados los vectores

$$\mathbf{a} = \langle -4,3,1 \rangle, \quad \mathbf{c} = \langle 5,-2,-5 \rangle$$

Calcule: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

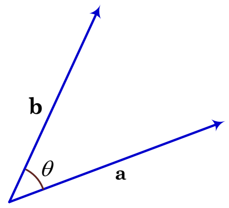
Solución

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} &= \langle -4,3,1 \rangle \cdot \langle 5,-2,-5 \rangle \\ &= (-4)(5) + (3)(-2) + (1)(-5) \\ &= -20 - 6 - 5 \\ &= -31 \end{aligned}$$

Angulo entre dos vectores

El ángulo entre dos vectores distintos de cero se puede calcular a partir de la expresión

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}$$



En forma alternativa, si θ es el ángulo entre los dos vectores, el producto escalar se puede calcular como

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cos\theta$$

Vectores paralelos y perpendiculares

Vectores paralelos

Dos vectores **a** y **b** son paralelos si

$$\mathbf{a} = c\mathbf{b}$$

Vectores ortogonales o perpendiculares

Dos vectores **a** y **b** son perpendiculares si

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$$

Ejemplo 2: Aplicación del producto punto

Determine si el triángulo que tiene vértices en los puntos $A(1,-3,-2)$, $B(2,0,-4)$, $C(6,-2,-5)$ es un triángulo rectángulo.

Solución

Para establecer si un triángulo es rectángulo debemos calcular al menos dos de sus ángulos. El tercero lo podemos calcular utilizando geometría. Si uno de los ángulos tiene valor de 90º, el triángulo es rectángulo.

Para calcular el ángulo en el vértice A se calcula el vector que va de A a B y el vector que va de a A a C

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = \langle 2-1, 0-(-3), -4-(-2)\rangle \\ &= \langle 1,3,-2\rangle \\ \overrightarrow{AC} &= C - A = \langle 6-1, -2-(-3), -5-(-2)\rangle \\ &= \langle 5,1,-3\rangle\end{aligned}$$

El coseno del ángulo A es

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\langle 1,3,-2\rangle\cdot\langle 5,1,-3\rangle}{|\langle 1,3,-2\rangle||\langle 5,1,-3\rangle|} \\ &= \frac{(1)(5)+(3)(1)+(-2)(-3)}{\sqrt{1+9+4}\sqrt{25+1+9}} = \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{35}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

Entonces la medida del ángulo $A = 50.77^{\circ}$

Procediendo de forma similar para encontrar el ángulo B

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} &= A - B = \langle 1-2, -3-0, -2-(-4)\rangle \\ &= \langle -1,-3,2\rangle \\ \overrightarrow{BC} &= C - B = \langle 6-2, -2-0, -5-(-4)\rangle \\ &= \langle 4,-2,-1\rangle\end{aligned}$$

El coseno del ángulo B es

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|BA| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\langle -1,-3,2\rangle \cdot \langle 4,-2,-1\rangle}{|\langle -1,-3,2\rangle||\langle 4,-2,-1\rangle|}$$

$$= \frac{(-1)(4)+(-3)(-2)+(2)(-1)}{\sqrt{1+9+4}\sqrt{16+4+1}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{21}}$$

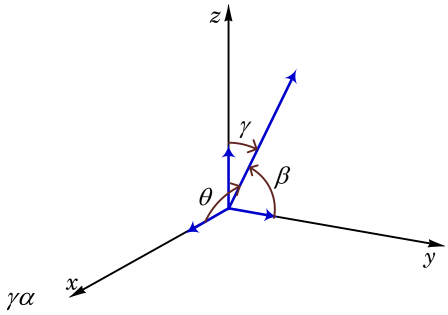
$$= 0$$

Como $\cos B = 0$ se tiene que $B = \cos^{-1}(0) = 90^{\circ}$

Se concluye que el triángulo es rectángulo y la medida de sus ángulos agudos son 50.77º y 39.23º

Cosenos directores

Se llama cosenos directores a los cosenos de los ángulos que un vector forma con los ejes coordenados, es decir los ángulos que un vector **a** forma con los vectores canónicos **i**, **j** y **k**



Al utilizar la fórmula para el coseno del ángulo entre el vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y los vectores canónicos **i**, **j** y **k** se tiene

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{i}\|} = \frac{\langle a_1,a_2,a_3\rangle\cdot\langle 1,0,0\rangle}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}$$

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{j}\|} = \frac{\langle a_1,a_2,a_3\rangle\cdot\langle 0,1,0\rangle}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{k}\|} = \frac{\langle a_1,a_2,a_3\rangle\cdot\langle 0,0,1\rangle}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}$$

Los cosenos directores de un vector forman un vector unitario en la dirección del vector, es decir

$$\langle\cos\theta, \cos\beta, \cos\gamma\rangle = \left\langle \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}, \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}, \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}\right\rangle$$

Como el vector anterior es un vector unitario, su módulo es 1, por lo tanto

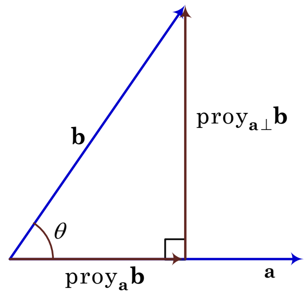
$$\cos^2\theta + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Proyecciones y componentes

Todo vector **b** se puede expresar como la suma de un vector paralelo al vector **a** (llamado proyección vectorial de **b** sobre **a**) y de un vector perpendicular al vector **a** (llamado proyección vectorial de **b** perpendicular al vector **a**).

A las longitudes de estas proyecciones se les llama proyección escalar del vector **b** sobre el vector **a** y proyección escalar del vector **b** sobre el vector perpendicular al vector **a**. A las longitudes de las proyecciones también se les llama componentes.

Las componentes y las proyecciones son de mucha utilidad en el calculo de distancias en los problemas de rectas y planos



Para las proyecciones se procede de la siguiente manera

$$\mathrm{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos\theta = |\mathbf{b}|\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$$

Para obtener la proyección del vector **b** sobre el vector **a**, se encuentra un vector unitario en la dirección del vector **a** y le multiplica por la longitud del cateto adyacente, que es la componente calculada en la ecuación de arriba. Si llamamos $\mathbf{w}_1$ a esta proyección se tiene

$$\mathrm{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right)\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}$$

Si $\mathbf{w}_1$ es la proyección del vector **b** sobre un vector **a** y $\mathbf{w}_2$ es la proyección del vector **b** sobre un vector perpendicular al vector **a**, entonces se tiene que

$$\mathbf{b} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{Proy}_{\mathbf{a}\perp}\mathbf{b} = \mathbf{w}_2 = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\,\mathbf{a}$$

Ejemplo 3: Cálculo de proyecciones

a. Encontrar los cosenos directores del vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

b. Encontrar las proyección y la proyección perpendicular del vector $\mathbf{a} = \langle -4, 3, 5\rangle$ sobre el vector $\mathbf{c} = \langle 1, -5, -2\rangle$

Solución

a. Los cosenos directores son

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{i}\|} = \frac{\langle 3, -2, -4\rangle\cdot\langle 1, 0, 0\rangle}{\sqrt{9+4+16}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{j}\|} = \frac{\langle 3, -2, -4\rangle\cdot\langle 0, 1, 0\rangle}{\sqrt{9+4+16}} = \frac{-2}{\sqrt{29}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{k}\|} = \frac{\langle 3, -2, -4\rangle\cdot\langle 0, 0, 1\rangle}{\sqrt{9+4+16}} = \frac{-4}{\sqrt{29}}$$

b. Comenzamos encontrando la proyección del vector **a** sobre el vector **c**

$$\mathbf{Proy_c a} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{c}|^2}\mathbf{c} = \frac{\langle 1,-5,-2\rangle\langle -4,3,5\rangle}{\left(\sqrt{1+25+4}\right)^2}\langle 1,-5,-2\rangle = \frac{-4-15-10}{\left(\sqrt{30}\right)^2}\langle 1,-5,-2\rangle$$

$$= \frac{-29}{30}\langle 1,-5,-2\rangle = \left\langle -\frac{29}{30}, \frac{29}{6}, \frac{29}{15}\right\rangle$$

La proyección del vector a sobre un vector perpendicular a c se calcula con una diferencia de vectores

$$\mathbf{Proy_{c\perp} a} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{c}\|^2}\mathbf{c}$$

$$= \langle -4,3,5\rangle - \left\langle -\frac{29}{30}, \frac{29}{6}, \frac{29}{15}\right\rangle$$

$$= \left\langle -\frac{91}{30}, -\frac{11}{6}, \frac{46}{15}\right\rangle$$

Ejercicios

1.

Dados los vectores $\vec{A} =< 1, a, 0 >$ y $\vec{B} =< 0, 10, 1 >$, calcule el valor de la constante a para que el ángulo que forman ambos vectores sea de $\frac{3\pi}{4}$.

Respuesta:

2.

Dado el siguiente vector: $\vec{A} =< 9, 7, 6 >$, el coseno director que forma este vector con el eje " z ", como número real es:

Respuesta:

3.

Dados los vectores $\vec{A} =< 2, a, -1 >$ y $\vec{B} =< 0, 1, -3 >$, el valor de la constante a para que los vectores sean perpendiculares es:

Seleccione una:

- ○ a. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- ○ b. a = 3
- ○ c. a = -3
- ○ d. a = -6
- ○ e. a = 0

4.

Los puntos $A(0,4,2)$, $B(3,1,-1)$ y $C(2,2,4)$ forman un triángulo con vértices A, B y C. ¿El coseno del ángulo B es?

Seleccione una:

- a. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- b. $-\frac{7}{9}$
- c. $\frac{7}{9}$
- d. Todas las otras respuestas son incorrectas.
- e. $-\frac{1}{3}$

5.

Considere los vectores $\vec{A} =< 4,2,4 >$ y $\vec{B} =< 4,12,3 >$. Encuentre la Componente de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$

Seleccione una:

- a. $\frac{26}{4}$
- b. $\frac{13}{3}$
- c. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- d. $\frac{26}{3}$
- e. 4

6.

Si los ángulos directores de un determinado vector son: $\alpha = \frac{\pi}{3}$ y $\beta = \frac{\pi}{3}$, calcule el tercer ángulo director que sea menor o igual que $\frac{\pi}{2}$. (Exprese su respuesta en radianes).

Respuesta: