6.2 Vectores en el espacio

OBJETIVOS

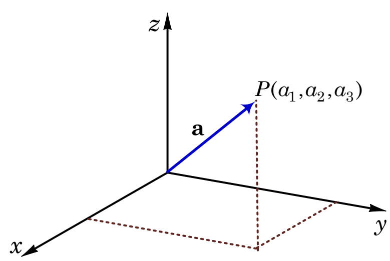
- Calcular la suma resta y multiplicación por un número de vectores.
- Obtener un vector que pasa por dos puntos.
- Calcular el módulo de un vector.
- Calcular el vector unitario de un vector.
- Expresar un vector en término de los vectores canónicos unitarios.

Vectores en el espacio

Un vector en el espacio, cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto terminal es el punto $P(a_1, a_2, a_3)$ se define como

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

Las coordenadas a_1, a_2 y a_3, son llamadas componentes del vector $\mathbf{a}$. Si el punto inicial y el punto terminal están en el origen, entonces $\mathbf{a}$ es el vector cero o vector nulo y se representa como $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$. La siguiente figura muestra la representación gráfica un vector con punto inicial en el origen y punto terminal en el punto $P(a_1, a_2, a_3)$



Operaciones con vectores

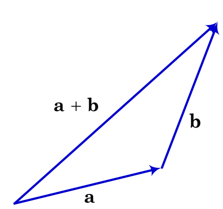
En esta sección de definen las operaciones de suma de vectores, multiplicación por un escalar y resta de vectores.

Suma de vectores

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son dos vectores de R^3, se define la suma como

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

Geométricamente la suma de los vectores es un vector que tiene punto inicial en el vector **a** y punto terminal en el vector **b**

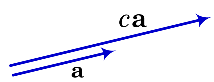


Multiplicación por un escalar

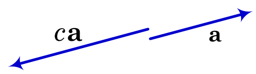
Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es un vector de R^3 y c es un número real (llamado escalar), se define la multiplicación de un vector por un escalar como

$$c\mathbf{a} = c\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = c\langle ca_1, c\, a_2, ca_3 \rangle$$

Geométricamente la multiplicación por un escalar modifica la longitud del vector a, alargándolo si $c > 0$ y comprimiéndolo si $0 < c < 1$. Cuando $c < 0$ el sentido del vector se invierte. La siguiente figura muestra el efecto de multiplicar un vector por un escalar



$c > 0$



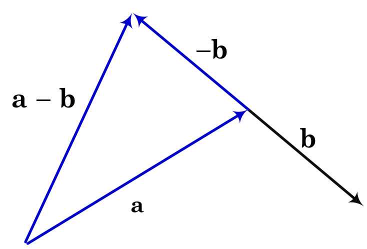
$c < 0$

Resta de vectores

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son dos vectores de R^3, se define la resta de vectores como

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle -b_1, -b_2, -b_3 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

La figura muestra la interpretación geométrica de la resta de vectores



Ejemplo 1: Operaciones con vectores

Dados los vectores

$$\mathbf{a} = \langle -4,3,1 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 5,0,-3 \rangle, \quad \mathbf{c} = \langle 5,-2,-5 \rangle,$$

Calcule: i. $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ ii. $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ iii. $4\mathbf{c} + 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$

Solución

i. Primero se multiplica por el escalar y luego se realiza la suma

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} &= 2\langle -4,3,1 \rangle + 3\langle 5,0,-3 \rangle = \langle -8,6,2 \rangle + \langle 15,0,-9 \rangle \\ &= \langle 7,6,-7 \rangle \end{aligned}$$

ii. Se procede de forma similar al inciso anterior solo que ahora se restan los vectores

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} &= 2\langle -4,3,1 \rangle - 3\langle 5,0,-3 \rangle = \langle -8,6,2 \rangle - \langle 15,0,-9 \rangle \\ &= \langle -23,6,11 \rangle \end{aligned}$$

iii. Procediendo de forma similar

$$\begin{aligned} 4\mathbf{c} + 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= 4\langle 5,-2,-5 \rangle + 3\langle -4,3,1 \rangle - 2\langle 5,0,-3 \rangle \\ &= \langle 20,-8,-20 \rangle + \langle -12,9,3 \rangle + \langle -10,0,6 \rangle \\ &= \langle -2,1,-11 \rangle \end{aligned}$$

Vector entre dos puntos

Si $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos en el espacio, el vector $\mathbf{v}$ que va del punto P al punto Q está dado por

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

La definición anterior es muy simple, pero de gran utilidad en la solución de problemas de rectas y planos en el espacio ya que permite encontrar un vector conocidos dos puntos de una recta o bien si se conocen dos puntos de un plano.

Ejemplo 2: Vector entre dos puntos

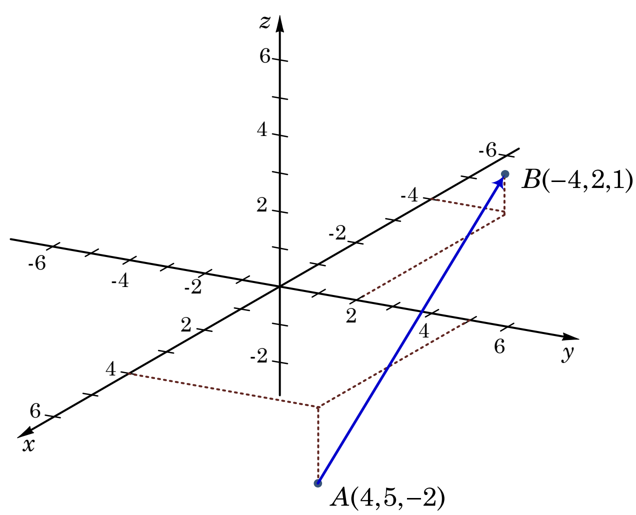
Encuentre el vector que va del punto $A(4,5,-2)$ al punto $B(-4,2,1)$. Dibuje su gráfica

Solución

El vector está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \overrightarrow{AB} = B - A = \langle -4 - 4, 2 - 5, 1 - (-2) \rangle \\ &= \langle -8, -3, 3 \rangle \end{aligned}$$

En la figura se muestran los dos puntos y el vector en el espacio



Longitud o magnitud de un vector

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es un vector de R^3, entonces la longitud o magnitud del vector está dada por

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

La longitud de un vector se expresa en unidades lineales, tales como metros, pies, centímetros, etc. Dependiendo del sistema de medición que se esté utilizando.

Vector unitario

Si **a** es un vector distinto de cero, entonces un vector unitario en la misma dirección de **a** está dado por

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\langle a_1, a_2, a_3 \rangle}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}}$$

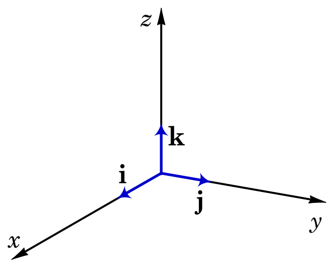
Vectores unitarios canónicos

Los vectores unitarios $\langle 1, 0, 0 \rangle$, $\langle 0, 1, 0 \rangle$ y $\langle 0, 0, 1 \rangle$ se llaman vectores unitarios canónicos o estándar y se representan como

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Cualquier vector puede representarse como una suma de los vectores unitarios canónicos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1 \langle 1, 0, 0 \rangle + a_2 \langle 0, 1, 0 \rangle + a_3 \langle 0, 0, 1 \rangle \\ &= a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \end{aligned}$$



Ejemplo 3: Calculando un vector unitario

Dado el vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + -\mathbf{k}$.

a. Encuentre la longitud del vector **v**

b. Encuentre un vector unitario en la dirección de **v**

Solución

a. la longitud del vector es

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| &= \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 16 + 1} \\ &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

b. un vector unitario en la dirección de **v** es

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} &= \frac{\langle v_1, v_2, v_3 \rangle}{\sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2}} \\ &= \frac{\langle 2, -4, -1 \rangle}{\sqrt{21}} \\ &= \left\langle \frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}} \right\rangle \end{aligned}$$

Aplicaciones de los vectores

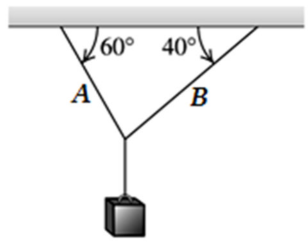
Los vectores en el plano tienen muchas aplicaciones en física y en mecánica. El siguiente ejemplo ilustra una aplicación de los vectores en los problemas de equilibrio de cuerpos

Ejemplo 4: Equilibrio de cuerpos

La figura muestra un objeto que pesa 200 libras y que está sostenido por dos cables A y B.

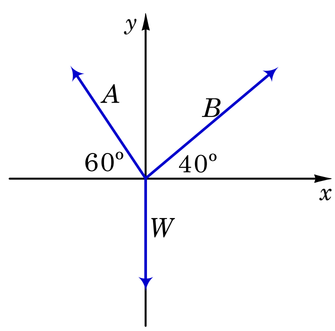
a. Exprese la tensión en cada cable en términos de los vectores unitarios **i** y **j**.

b. Utilice operaciones con vectores para determinar la tensión en cada cable.



Solución

a. Como se observa el sistema está formado por 3 fuerzas, las dos tensiones A y B y el peso del objeto que llamaremos W. El siguiente diagrama de vectores muestra las tres fuerzas que actúan sobre el sistema



Las componentes del vector A son

$$A_x = -A\cos 60° = -\frac{1}{2}A \qquad A_y = A\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}A$$

Las componentes del vector B son

$$B_x = B\cos 40° = 0.766B \qquad B_y = B\operatorname{sen} 40° = 0.643B$$

Las componentes del vector W son

$$W_x = 0 \qquad W_y = -200$$

Los tres vectores se pueden expresar en términos de los vectores canónicos como sigue

$$\mathbf{A} = -0.5A\mathbf{i} + 0.866A\mathbf{j}$$

$$\mathbf{B} = 0.766B\mathbf{i} + 0.643B\mathbf{j}$$

$$\mathbf{W} = -200\mathbf{j}$$

b. Como el sistema está en equilibrio, la suma de vectores es igual acero

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

$$(-0.5A\mathbf{i} + 0.866A\mathbf{j}) + (0.766B\mathbf{i} + 0.643B\mathbf{j}) + (-200\mathbf{j}) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

Igualando las componentes en cada eje se obtiene un sistema de ecuaciones, que al resolverlo nos da los valores de las tensiones A y B.

$$-0.5A + 0.766B = 0$$

$$0.866A + 0.643B - 200 = 0$$

Despejando B en términos de A

$$B = \frac{0.5A}{0.766} = 0.653A$$

Sustituyendo en la segunda ecuación y despejando la tensión A

$$0.866A + 0.643(0.653A) - 200 = 0$$

$$0.866A + 0.420A = 200$$

$$1.286A = 200$$

$$A = 155.552$$

$$B = 0.653A = 0.653(155.552)$$

$$= 101.576$$

De donde la tensión en el cable A es de 155.55 lb y en el cable B es de 101.58 lb