6.10 Coordenadas esféricas

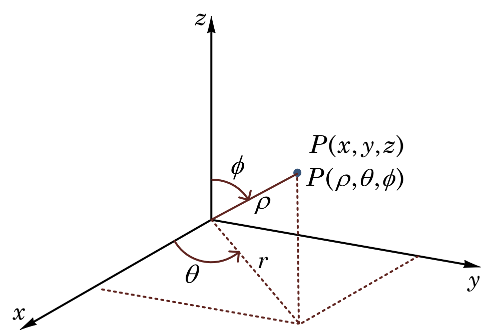
OBJETIVOS

- Representar puntos en coordenadas esféricas.
- Convertir puntos de coordenadas esféricas a rectangulares y viceversa.
- Dibujar la gráfica de una ecuación expresada en coordenadas esféricas.
- Convertir una ecuación dada en coordenadas esféricas a rectangulares y viceversa.

En esta sección se estudian las coordenadas esféricas. En este sistema, un punto en el espacio se representa utilizando coordenadas polares en el plano xy y un ángulo para representar la tercera dimensión. Este sistema es útil para representar la ecuación de una esfera en el espacio y de algunas superficies que tienen el origen del sistema de coordenadas como punto de simetría.

Coordenadas esféricas

En un sistema de coordenadas esféricas, un punto P en el espacio se representa de la forma $P(\rho,\theta,\phi)$. En donde $\rho \geq 0$ es la distancia desde el origen hasta el punto P, θ es el ángulo utilizado en coordenadas polares para $r \geq 0$ y se localiza en el plano xy. ϕ es el ángulo entre el eje z y el segmento que va del origen al punto P, $0 \leq \phi \leq \pi$.



Las fórmulas para convertir un punto de coordenadas esféricas a rectangulares o de coordenadas rectangulares a esféricas, son las siguientes

Coordenadas esféricas a rectangulares

$$r = \rho \operatorname{sen}\phi$$

$$x = r\cos\theta = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$

$$z = \rho\cos\phi$$

Coordenadas rectangulares a esféricas

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Ejemplo 1: Convertir coordenadas esféricas a rectangulares

Convertir los puntos dados en coordenadas esféricas a sus correspondientes coordenadas rectangulares

a. $\left(5,\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ **b.** $\left(6,-\frac{\pi}{4},0\right)$

Solución

a. Recuerde que la representación en coordenadas rectangulares es única, por lo que solo existe un punto en coordenadas rectangulares para un punto dado en coordenadas esféricas

$$x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta = 5\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta = 5\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$z = \rho\cos\phi = 5\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Por lo que las coordenadas rectangulares del punto son

$$\left(\frac{5\sqrt{2}}{4},\frac{5\sqrt{2}}{4},\frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$$

b. Pare este otro punto se tiene

$$x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta = 6\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos(0) = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1) = -3\sqrt{2}$$

$$y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta = 6\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}(0) = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(0) = 0$$

$$z = \rho\cos\phi = 6\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

Por lo que las coordenadas rectangulares del punto son

$$\left(-3\sqrt{2},0,3\sqrt{2}\right)$$

Ejemplo 2: Convertir coordenadas rectangulares a esféricas

Convertir los puntos dados en coordenadas rectangulares a sus correspondientes coordenadas esféricas

a. $\left(1,0,-\sqrt{3}\right)$ **b.** $\left(-3,3,4\sqrt{2}\right)$

Solución

a. Aunque existen varias soluciones, solo consideraremos la que tienen ángulo $0 \le \theta \le 2\pi$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (1)^2 + (0)^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4$$

$$\rho = 2$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = \tan^{-1}(0) = 0$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

Las coordenadas esféricas del punto son

$$\left(2, 0, \frac{5\pi}{6}\right)$$

b. Para este otro punto se tiene $\left(-3, 3, 4\sqrt{2}\right)$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (-3)^2 + (3)^2 + (4\sqrt{2})^2 = 50$$

$$\rho = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{-3}\right) = \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{(-3)^2 + (3)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}\right) = 0.64$$

Las coordenadas esféricas del punto son

$$\left(5\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, 0.64\right)$$

Ejemplo 3: Convertir una ecuación de coordenadas rectangulares a esféricas

Hallar una ecuación en coordenadas cilíndricas para la ecuación dada en coordenadas rectangulares

a. $x^2 + y^2 + z^2 + 4z = 0$ **b.** $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$

Solución

a. Para dibujar la gráfica es mejor utilizar coordenadas rectangulares, ya que en secciones anteriores se estudio con detalle el trazo de ellas

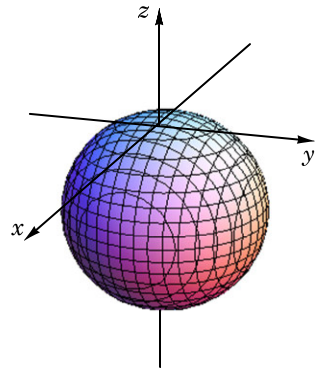
Al completar cuadrados se obtiene

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4z = 0$$

$$x^2 + y^2 + \left(z^2 + 4z + 4\right) = 4$$

$$x^2 + y^2 + \left(z + 2\right)^2 = 4$$

Que tiene como gráfica una esfera de radio 2, con centro en el punto $(0,0,-2)$



Para expresar la ecuación en coordenadas esféricas procedemos como sigue

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Al sustituir esta expresión se tiene

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4z = 0$$
$$\rho^2 + 4z =$$

Como $z = \rho\cos\phi$

$$\rho^2 + 4\rho\cos\phi = 0$$

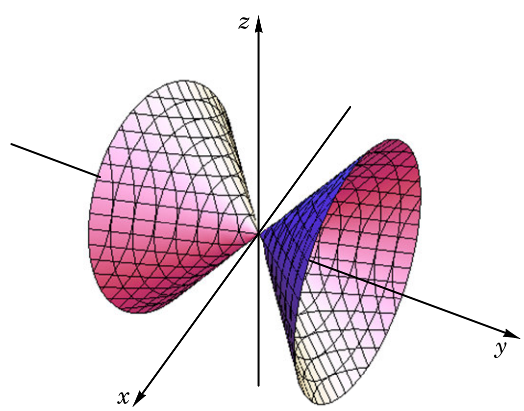
Si $\rho \neq 0$ se puede dividir la ecuación entre ρ

$$\rho + 4\cos\phi = 0$$
$$\rho = -4\cos\phi$$

b. La ecuación $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$ se puede interpretar como una superficie de revolución

$$x^2 + z^2 = 4y^2$$

En donde las trazas en planos paralelos al plano xz son círculos, o bien se puede interpretar como un cono con secciones transversales circulares y con eje en el eje y. La siguiente figura muestra la gráfica de la superficie



Reordenando la ecuación par expresarla en coordenadas esféricas

$$x^2 + z^2 = 4y^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 5y^2$$
$$\rho^2 = 5\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$

Si $\rho \neq 0$ se puede dividir la ecuación entre ρ

$$\rho = 5 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$

Ejemplo 4: Convertir una ecuación de coordenadas esféricas a rectangulares

Hallar una ecuación en coordenadas rectangulares para la ecuación dada en coordenadas esféricas

a. $\phi = \dfrac{3\pi}{4}$ **b.** $\rho = 4\csc\phi\sec\theta$

Solución

a. En este caso primero se procede a encontrar la ecuación en coordenadas rectangulares

$$\phi = \frac{3\pi}{4}$$

Usando la fórmula de transformación

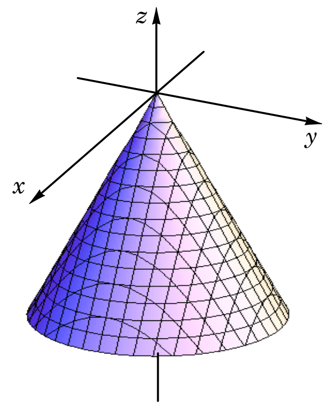
$$\cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Elevando ambos lados al cuadrado

$$\frac{1}{2} = \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z^2$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Que es un semi cono con secciones transversales en forma de círculos paralelos al plano xy. Se llama semicono ya que abre hacia únicamente hacia abajo pues ángulo es $\phi = \dfrac{3\pi}{4}$

La siguiente figura muestra la gráfica del semicono



b. Trasladando la ecuación a coordenadas rectangulares

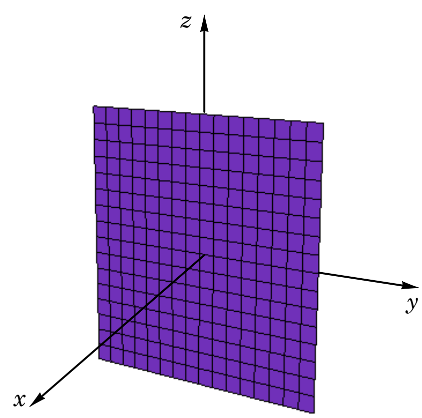
$$\rho = 4\csc\phi\sec\theta$$

$$\rho = 4\frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta = 4$$

$$x = 4$$

Es la ecuación de un plano perpendicular al eje x y a 4 unidades de distancia del origen



Ejercicios

1.

Dada la ecuación R^3

$$y^2 = x$$

Responda las siguientes preguntas:

i. Identifique la superficie que representa

ii. Su ecuación en coordenadas esféricas es

2.

La superficie cuya ecuación es:

$$tan\ \theta = 2$$

en coordenadas esféricas representa:

(Sugerencia: encuentre la ecuación en coordenadas rectangulares y luego responda).

Seleccione una:

- a. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- b. Un cono circular recto con eje paralelo al eje "z".
- c. Un cilindro circular recto de radio 1.0 con eje paralelo al eje "z".
- d. Una esfera con centro en (0,0,1.0) y radio 1.0
- e. Un plano paralelo al eje "z".

3.

Dé el nombre de la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es:

$$\rho = 8\ csc\ \phi sec\ \theta$$

(Sugerencia: primero determine la ecuación de la superficie en coordenadas cartesianas)

Seleccione una:

- a. Un plano horizontal paralelo al eje "x".
- b. Una esfera con centro en el origen y radio de 8 unidades.
- c. Cilindro parabólico con eje vertical paralelo al eje "z".
- d. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- e. Un plano vertical paralelo al plano "yz".

4.

Los puntos en coordenadas esféricas $(8, \pi/2, \pi/2)$, $(0, 0, 0)$ y $(6, \pi, \pi/4)$ forman un triángulo rectángulo, calcule su hipotenusa.

(Sugerencia: determine primero las coordenadas cartesianas de cada punto)

Respuesta:

5.

La ecuación en rectangulares:

$$z^2 = 3x^2 + 3y^2$$

Representa:

Seleccione una:

- a. Un cono cuya ecuación en coordenadas esféricas es $\phi = \frac{\pi}{6}$.
- b. Ninguna de las opciones es correcta.
- c. Un paraboloide cuyo eje principal es el eje "z".
- d. Una esfera con centro en el origen y radio 1.
- e. Un cono cuya ecuación en coordenadas esféricas es $\phi = \frac{\pi}{4}$.

6.

Las coordenadas esféricas del punto dado en coordenadas rectangulares $(2, -2, -2\sqrt{2})$ son:

Seleccione una:

- a. Ninguna de las otras es correcta.
- b. $(4, 5\pi/4, 2\pi/4)$
- c. $(4, 7\pi/4, 3\pi/4)$
- d. $(2\sqrt{2}, 7\pi/4, 3\pi/4)$
- e. $(2\sqrt{2}, 5\pi/4, \pi/4)$