

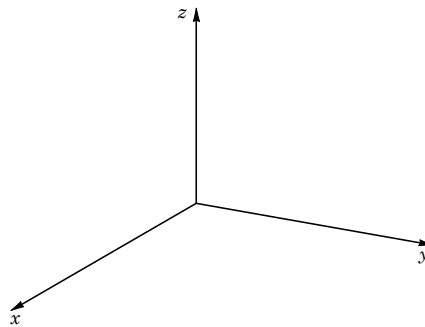
6.2 El sistema de coordenadas en $\mathbb{R}^3$

OBJETIVOS

- Dibujar puntos en un sistema de coordenadas tridimensionales.
- Calcular distancias y punto medio usando la fórmula de distancia y la fórmula del punto medio.
- Encontrar la ecuación y dibujar la gráfica de una esfera.

Coordenadas en el espacio

Un sistema de coordenadas tridimensionales esta formado por tres ejes de coordenadas, el eje x , el eje y y el eje z . Los ejes x y y forman el plano en dos dimensiones ya conocido y estudiado en los cursos anteriores. El eje z es perpendicular al plano xy , como se muestra figura donde solo se indican los ejes positivos.



Observe que los ejes x y y forman el plano xy el cual es horizontal, los ejes x y z forman el plano xz y los ejes y y z forman el plano yz . Los tres planos coordenados son perpendiculares entre si y se intersectan en el origen del sistema de coordenadas.

Un punto en el sistema de coordenadas tridimensionales se representa como $P(x,y,z)$ donde x es la distancia del plano yz al punto P , y es la distancia del plano xz al P y z es la distancia del plano xy al punto P .

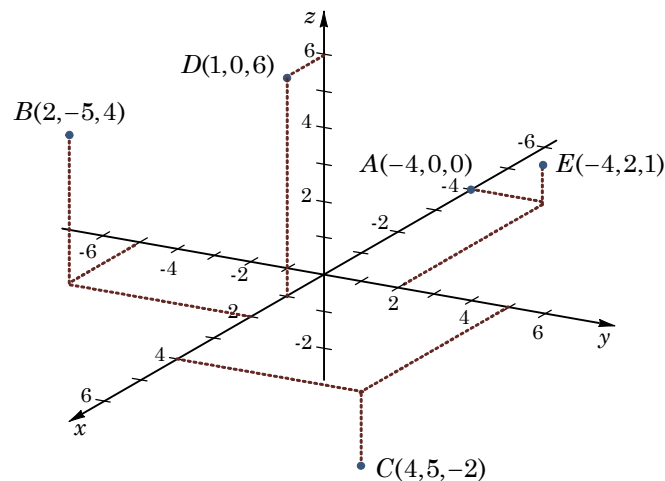
Ejemplo 1: Graficando puntos en el espacio

Dibuje los puntos siguientes en un sistema de coordenadas tridimensionales

$$A(-4,0,0), \quad B(2,-5,4), \quad C(4,5,-2), \quad D(1,0,6), \quad E(-4,2,1)$$

Solución

Para dibujar un punto en tres dimensiones primero se trazan las coordenadas en el plano xy y luego se traza la coordenada z hacia arriba si es positiva o hacia abajo si la coordenada z es negativa. Si la coordenada z es cero el punto esta en el plano xy . En la figura siguiente se muestra el dibujo de los cinco puntos requeridos.



Formula de distancia y punto medio

Las fórmulas de distancia y de punto medio que ya se han utilizado en el plano coordenado, se pueden generalizar para el espacio de tres dimensiones

Formula de distancia

Si $P(x_0, y_0, z_0)$ y $Q(x_1, y_1, z_1)$ son dos puntos en el espacio, la distancia entre ellos está dada por

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

Formula del punto medio

Si $P(x_0, y_0, z_0)$ y $Q(x_1, y_1, z_1)$ son dos puntos en el espacio, el punto medio entre P y Q tiene coordenadas

$$P_M = \left(\frac{x_1 + x_0}{2}, \frac{y_1 + y_0}{2}, \frac{z_1 + z_0}{2} \right)$$

Ejemplo 2: Distancia y punto medio

Determine la distancia y el punto medio de los puntos dados

$$A(2, -5, 4), \quad B(4, 5, -2)$$

Solución

La distancia está dada por

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (5 - (-5))^2 + (-2 - 4)^2} \\ &= \sqrt{4 + 100 + 16} = \sqrt{120} \\ &= 2\sqrt{30} \end{aligned}$$

El punto medio es

$$\begin{aligned} P_M &= \left(\frac{x_1 + x_0}{2}, \frac{y_1 + y_0}{2}, \frac{z_1 + z_0}{2} \right) = \left(\frac{2 + 4}{2}, \frac{-5 + 5}{2}, \frac{4 + (-2)}{2} \right) \\ &= (3, 0, 1) \end{aligned}$$

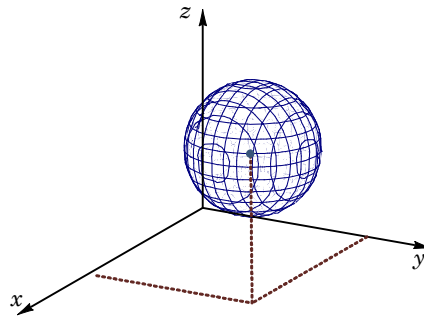
Ecuación de la esfera

La ecuación de la esfera, con centro en el punto $C(h, k, l)$ y radio r está dada por

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

Para el caso particular en donde el centro de la esfera está en el origen, la ecuación se reduce a

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



Ejemplo 3: Ecuación de la esfera

Encuentre el centro, el radio y dibuje la gráfica de la esfera cuya ecuación es

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 24x - 4y + 8z - 23 = 0$$

Solución

Como se hace para la ecuación de un círculo en el plano, hay que agrupar términos y completar un trinomio cuadrado perfecto para cada variable

$$(4x^2 - 24x) + (4y^2 - 4y) + (4z^2 + 8z) = 23$$

$$4(x^2 - 6x) + 4(y^2 - y) + 4(z^2 + 2z) = 23$$

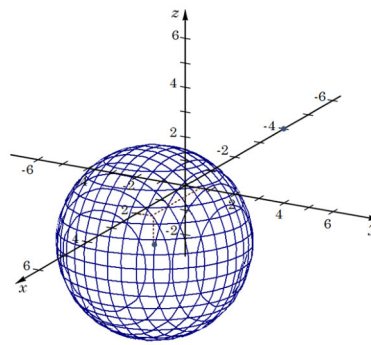
$$4(x^2 - 6x + 9) + 4\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) + 4(z^2 + 2z + 1) = 23 + 36 + 1 + 4$$

$$4(x - 2)^2 + 4\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 4(z + 1)^2 = 64$$

$$(x - 2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z + 1)^2 = 16$$

Es una esfera de radio 4 y centro en el punto $C\left(2, \frac{1}{2}, -1\right)$

La gráfica de la esfera se muestra en la siguiente figura



Ejemplo 4: Ecuación de la esfera

Encuentre la ecuación de la esfera que tiene como puntos $A(1,0,6)$ y $B(-4,2,1)$ como extremos de un diámetro

Solución

El centro de la esfera se encuentra en el punto medio de los puntos dados

$$\begin{aligned} C(h,k,l) &= \left(\frac{x_1 + x_0}{2}, \frac{y_1 + y_0}{2}, \frac{z_1 + z_0}{2} \right) \\ &= \left(\frac{1 + (-4)}{2}, \frac{0 + 2}{2}, \frac{6 + 1}{2} \right) \\ &= \left(-\frac{3}{2}, 1, \frac{7}{2} \right) \end{aligned}$$

La distancia entre los dos puntos dados es el diámetro de la esfera, al dividir el diámetro entre 2 se calcula el radio

$$\begin{aligned} r &= \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-4 - 1)^2 + (2 - 0)^2 + (1 - 6)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{25 + 4 + 25} = \frac{1}{2} \sqrt{54} \\ r &= \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de la esfera es

$$\begin{aligned} (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 &= r^2 \\ \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 + (y - 1)^2 + \left(z - \frac{7}{2} \right)^2 &= \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} \right)^2 \\ x^2 + 3x + \frac{9}{4} + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 7z + \frac{49}{4} &= \frac{9(6)}{4} \\ 4x^2 + 12x + 9 + 4y^2 - 8y + 4 + 4z^2 - 28z + 49 &= 54 \\ 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 12x - 8y - 28z + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicios

1.

Un paralelogramo tiene como vértices los puntos:

$P(1, 0, -3)$; $Q(3, 1, -2)$; $R(6, 2, 2)$; $S(8, 3, 3)$. Calcule la diagonal de mayor longitud del paralelogramo.

Respuesta:

2.

Dados los puntos $P(x, x, 1)$ y $Q(0, 4, 2)$, determine el valor de " x " si la distancia entre los puntos $d(PQ) = 5$, luego calcule la suma de los valores encontrados para " x ".

Respuesta:

3.

Calcule el perímetro del triángulo con vértices $(1, 7, 5)$, $(8, 3, 3)$ y $(4, 4, 3)$

Seleccione una:

- ☐ a. Perímetro = 24.01
- ☐ b. Perímetro = 18.86
- ☐ c. Perímetro = 21.49
- ☐ d. Ninguna de las otras respuestas es correcta
- ☐ e. Perímetro = 17.12

4.

El triángulo definido por los puntos

$$(-1, 2, 3), (0, -2, 1) \text{ y } (-2, 0, -1)$$

es un triángulo:

Seleccione una:

- ☐ a. Equilátero.
- ☐ b. Rectángulo.
- ☐ c. Isósceles.
- ☐ d. Escaleno.
- ☐ e. Ninguna de las otras es correcta.

5.

Encuentre la ecuación general de la esfera, cuyo centro está en el punto $(3, 6, 4)$ y está contenida en el primer octante.

Seleccione una:

- ☐ a. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 12y + 8z = -52$
- ☐ b. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y - 8z = 70$
- ☐ c. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y + 8z = -52$
- ☐ d. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- ☐ e. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y - 8z = -52$

6.

Encuentre la ecuación general de la esfera, cuyo centro está en el punto $(5, -2, -5)$ y que pasa por el *plano* " xy ".

Seleccione una:

- ☐ a. $x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 4y - 10z = -29$
- ☐ b. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y + 10z = 79$
- ☐ c. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- ☐ d. $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 10z = -29$
- ☐ e. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y + 10z = -29$

7.

Los extremos de un diámetro de una esfera se encuentran en los puntos con coordenadas $A(-4, 5, 4)$ y $B(-5, 4, 5)$ respectivamente. Encuentre la ecuación de dicha esfera.

Seleccione una:

- ☐ a. $x^2 + y^2 + z^2 + 9x - 9y - 9z = -60$
- ☐ b. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- ☐ c. $x^2 + y^2 + z^2 + 9x + 9y - 9z = -20$
- ☐ d. $x^2 + y^2 + z^2 - 9x + 9y + 9z = -60$
- ☐ e. $x^2 + y^2 + z^2 - 9x - 9y - 9z = -20$