5.9 Serie de Taylor y serie de Mclaurin

OBJETIVOS

- Utilizar la serie de Taylor o MacLaurin para obtener la serie de funciones trascendentes.
- Derivar e integral las series Taylor o MacLaurin para obtener nuevas series.
- Utilizar la integral de una serie para aproximar el valor de una integral definida.

En esta sección se establece un procedimiento, por medio del cual, cualquier función se puede representar como una serie de potencias

Serie de Taylor y serie de MacLaurin

Suponga que cualquier función se puede representar por medio de una serie de potencias de la forma

En general, si una función tiene un desarrollo en series de potencias, ésta puede expresarse como

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c)^1 + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \ldots + a_n(x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

Para obtener los valores de las constantes se procede como se muestra a continuación

La serie debe ser valida para cualquier valor de x, si $x = c$

$$f(c) = a_0 + a_1(c-c)^1 + a_2(c-c)^2 + a_3(c-c)^3 + \ldots + a_n(c-c)^n$$

$$f(c) = a_0 + 0$$

$$a_0 = f(c)$$

Así ya se ha obtenido el valor de la primera constante. Para obtener las demás constantes se calculan las derivadas de la serie y se evalúan en $x = c$

$$f'(x) = D_x\left[a_0 + a_1(x-c)^1 + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \ldots + a_n(x-c)^n\right]$$

$$= a_1 + 2a_2(x-c)^1 + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \ldots + na_n(x-c)^{n-1}$$

La primera derivada debe ser válida para $x = c$

$$f'(c) = a_1 + 2a_2(c-c)^1 + 3a_3(c-c)^2 + 4a_4(c-c)^3 + \ldots + na_n(c-c)^{n-1}$$

$$f'(c) = a_1$$

Calculando la segunda derivada de la serie

$$f''(x) = D_x\left[a_1 + 2a_2(x-c)^1 + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \ldots + na_n(x-c)^{n-1}\right]$$

$$= 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-c)^1 + 4\cdot 3a_4(x-c)^2 + \ldots + n(n-1)a_n(x-c)^{n-2}$$

Al sustituir $x = c$ en la segunda derivada se obtiene que

$$a_2 = \frac{f''(c)}{2}$$

Al seguir calculando derivadas se obtiene la expresión para la constante de cada término de la serie.

$$a_3 = \frac{f'''(c)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(c)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$a_5 = \frac{f^{(5)}(c)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

En forma general

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Finalmente, cualquier función puede expresarse por medio de una serie de potencias de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$= f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-c)^4 + \cdots$$

La serie anterior recibe el nombre de **serie de Taylor** de la función f con centro en $x = c$. El caso especial en el que $c = 0$, la serie se transforma en

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$

y recibe el nombre de **serie de MacLaurin**.

Ejemplo 1: Obtener la serie de Taylor

a. Obtenga la serie de Taylor para la función $f(x) = \ln x$ centrada en $x = 2$

b. Utilice los primeros 4 términos de la serie para estimar el valor de $\ln 3$

Solución

a. Debemos obtener una serie de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Con $c = 2$

Para encontrar los coeficientes de cada termino será necesario calcular algunas derivadas de la función y evaluarlas en $c = 2$.

$$f(x) = \ln x \qquad f(2) = \ln 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(2) = -\frac{1}{2^2}$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3} \qquad f'''(2) = \frac{1 \cdot 2}{2^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} \qquad f^{(4)}(2) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2^4}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} \qquad f^{(5)}(2) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2^5}$$

Ahora procedemos a escribir los primeros términos de la serie

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \\
&= f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-c)^4 + \cdots
\end{aligned}
$$

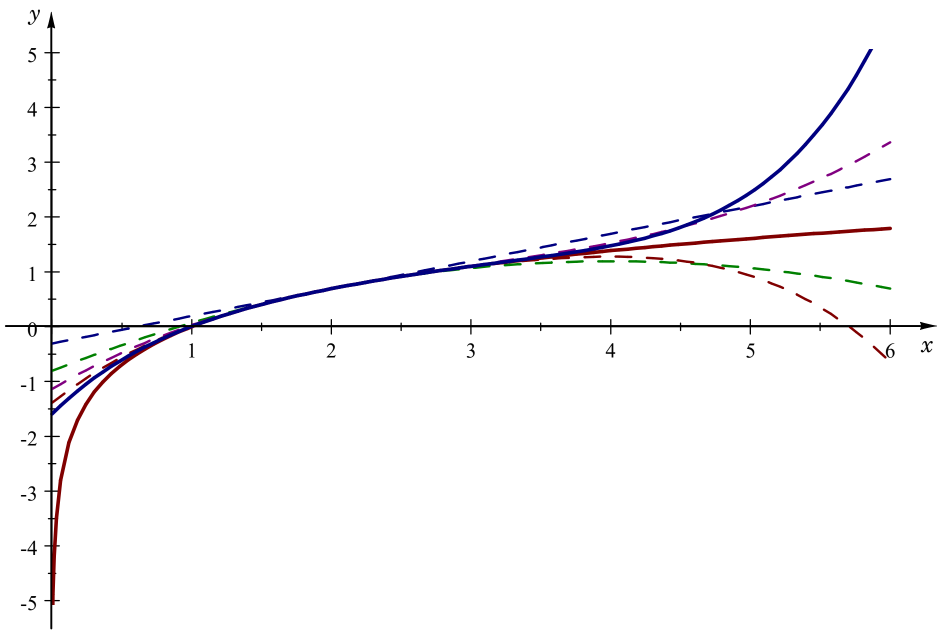
Como la serie está centrada en 2

$$
\begin{aligned}
\ln x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n \\
&= f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 + \cdots + \\
&= \ln 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}(x-2) + \frac{-\frac{1}{2^2}}{2!}(x-2)^2 + \frac{\frac{1\cdot 2}{2^3}}{3!}(x-2)^3 + \frac{\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^4}}{4!}(x-2)^4 + \frac{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2^5}}{5!}(x-2)^4 + \cdots +
\end{aligned}
$$

Ahora procedemos a simplificar los términos y a tratar de buscar un patrón para generar de forma más simple los términos siguientes

$$
\begin{aligned}
\ln x &= \ln 2 + \frac{1}{2\cdot 1}(x-2) - \frac{1}{2^2\cdot 2}(x-2)^2 + \frac{1}{2^3\cdot 3}(x-2)^3 - \frac{1}{2^4\cdot 4}(x-2)^4 + \frac{1}{2^5\cdot 5}(x-2)^5 + \cdots + \\
&= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x-2)^n
\end{aligned}
$$

La siguiente figura muestra los polinomios de Taylor de grado 1, 2, 3 y 4 con trazos discontinuos, el polinomio de grado 5 en color azul y la función $\ln x$ en color rojo. Puede observarse que para valores entre 1 y 3 la aproximación es bastante buena.



b. Usando los primeros 4 términos de la serie para estimar $\ln 3$

$$\begin{aligned}
\ln 3 &\approx \ln 2 + \frac{1}{2\cdot 1}(3-2) - \frac{1}{2^2\cdot 2}(3-2)^2 + \frac{1}{2^3\cdot 3}(3-2)^3 - \frac{1}{2^4\cdot 4}(3-2)^4 \\
&\approx \ln 2 + \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{8}(1)^2 + \frac{1}{24}(1)^3 - \frac{1}{64}(1)^4 \\
&\approx \ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} \\
&\approx 1.0942
\end{aligned}$$

El valor exacto obtenido con una calculadora es

$$\ln 3 = 1.09861$$

Ejemplo 2: Obtener la serie de MacLaurin

a. Utilice la serie de Maclaurin para representar la función $f(x) = \cos x$ como una serie de potencias.

b. En base a la serie anterior encuentre la serie para la función $g(x) = x^3\cos(x^2)$

c. Encuentre una serie para la integral $\int g(x)dx = \int x^3\cos(x^2)dx$

d. Utilice los primeros 4 términos de la serie del inciso (c) para evaluar $\int_0^1 x^3\cos(x^2)dx$

Solución

a. Debemos obtener una serie de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$$

Para encontrar los coeficientes de cada termino será necesario calcular algunas derivadas de la función y evaluarlas en 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x & f(0) &= \cos(0) = 1 \\
f'(x) &= -\operatorname{sen} x & f'(0) &= -\operatorname{sen}(0) = 0 \\
f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -\cos(0) = -1 \\
f'''(x) &= \operatorname{sen} x & f'''(0) &= \operatorname{sen}(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(4)}(0) &= \cos(0) = 1 \\
f^{(5)}(x) &= -\operatorname{sen} x & f^{(5)}(0) &= -\operatorname{sen}(0) = 0 \\
f^{(6)}(x) &= -\cos x & f^{(6)}(0) &= -\cos(0) = -1
\end{aligned}$$

Ahora procedemos a escribir los primeros términos de la serie

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n \\
&= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x)^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}(x)^6 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}(x)^6 + \cdots
\end{aligned}$$

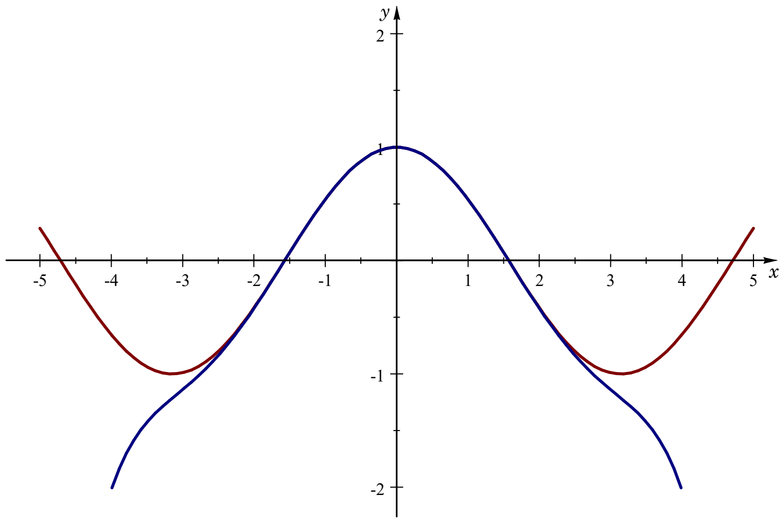
Observe que se han tomado más términos que en el ejemplo anterior ya que algunas derivadas toman valor de 0 y eso hace que los términos se anulen

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 + \frac{0}{1!}(x) + \frac{-1}{2!}(x)^2 + \frac{0}{3!}(x)^3 + \frac{1}{4!}(x)^4 + \frac{0}{5!}(x)^5 + \frac{-1}{6!}(x)^6 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2!}(x)^2 + \frac{1}{4!}(x)^4 - \frac{1}{6!}(x)^6 + \cdots\end{aligned}$$

Ahora viene la parte complicada, escribir la fórmula para el enésimo término. Observa que la serie es alternante, y los exponentes son todos pares, entonces la serie puede escribirse como

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x)^{2n}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la función coseno en color rojo y la del polinomio de MacLaurin de grado 6 en color azul



b. Lo más complicado es crear la serie para la función base, eso fue lo que hicimos en el inciso anterior, lo que sigue es utilizar la serie base para crear series más complicadas. Nunca intente crear una serie complicada usando la definición ya que las derivadas son muy tediosas y casi nunca se llega a la respuesta correcta.

Para encontrar la serie de $\cos(x^2)$ solamente se sustituye x^2 por x en la serie base y se simplifica

$$\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x^2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n}$$

Ahora se divide multiplica la serie por x^3

$$g(x) = x^3\cos(x^2) = x^3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n}$$

Para la sumatoria x es una constante ya que la variable de la sumatoria es n, entonces puede entrar a la sumatoria y luego se simplifican los exponentes

$$\begin{aligned}g(x) = x^3\cos(x^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^3\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n+3}\end{aligned}$$

c. Integrar una sumatoria también es algo muy sencillo ya que es la integral de una potencia de x

$$\begin{aligned}\int\left[x^3\cos(x^2)\right]dx &= \int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{4n+3}\right]dx\\ &= C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{x^{4n+3+1}}{4n+3+1}\\ &= C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+4}}{(4n+4)(2n)!}\end{aligned}$$

d. Para finalizar el ejemplo solo falta calcular los primeros 4 términos de la serie y evaluarlos de 0 a 1

$$\begin{aligned}\int_0^1\left[x^3\cos(x^2)\right]dx &\approx \left[\frac{x^4}{(4)(0)!}-\frac{x^8}{(8)(2)!}+\frac{x^{12}}{(12)(4)!}-\frac{x^{16}}{(16)(6)!}\right]_0^1\\ &\approx \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^8}{16}+\frac{x^{12}}{288}-\frac{x^{16}}{11520}\right]_0^1\\ &\approx \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{288}-\frac{1}{11520}\right)-0\\ &\approx 0.190885\end{aligned}$$

Serie de las principales funciones

A continuación, se muestran las series de las principales funciones trascendentes, estas series son las que sirven de base para obtener las series de otras funciones

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots \qquad R=1$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots \qquad R=\infty$$

$$\operatorname{sen}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots \qquad R=\infty$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots \qquad R=\infty$$

$$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\cdots \qquad R=1$$

$$\ln(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots \qquad R=1$$

Ejercicios

1.

Determine un polinomio de Maclaurin de grado 4 para aproximar la función

$$f(x) = \cos(6x^2)$$

luego utilice este polinomio para calcular la integral

$$\int_0^1 f(x)dx$$

(Sugerencia: calcule primero la serie de Maclaurin de $cos\ x$).

Respuesta:

2.

Dada la función

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)$$

Obtenga la serie de Maclaurin para $f(x)$ y luego utilice los primeros dos términos de la serie para calcular el valor de $f(0.5)$.

Respuesta:

3.

Dada la función

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{7}\right)$$

Obtenga la serie de Maclaurin para $f(x)$ y luego utilice los primeros dos términos de la serie para calcular el valor de $f(0.3)$.

Respuesta:

4.

Dada la siguiente función

$$f(x) = x^5 \cos\ x^3$$

generar una serie potencias de Maclaurin. (Sugerencia: primero encuentre una serie de potencias de la función $cos\ x$).

Seleccione una:

- a. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{5n+5}}{(2n)!}$
- b. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{6n}}{(2n)!}$
- c. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{6n+5}}{(2n)!}$
- d. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+5}}{(2n)!}$
- e. Ninguna de las otras es correcta

5.

Encuentre la serie de Taylor centrada en $a = \frac{\pi}{6}$ para la función

$$f(x) = \operatorname{sen} 3x$$

Seleccione una:

- a. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} 3^n \frac{(x-\frac{\pi}{6})^{2n}}{(2n)!}$
- b. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- c. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n} 3^n \frac{(x-\frac{\pi}{6})^{2n}}{(2n)!}$
- d. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n} 3^n \frac{(x-\frac{\pi}{6})^{2n}}{(2n)!}$
- e. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n} 3^{2n} \frac{(x-\frac{\pi}{6})^{2n}}{(2n)!}$

6.

Obtenga una serie centrada en $a = \frac{3\pi}{2}$ que represente a la función

$$f(x) = \cos x$$

Seleccione una:

- a. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- b. NINGUNA OPCIÓN ES CORRECTA
- c. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- d. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-\frac{3\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- e. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-\frac{3\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}$