5.8 Funciones como series de potencias

OBJETIVOS

- Expresar una función como una serie de potencias y encontrar su intervalo de convergencia.
- Derivar e integrar una serie de potencias para obtener la derivada o la integral de la función.

Muchas funciones algebraicas y trascendentes se pueden representar utilizando una serie de potencias como muestra en esta sección

Funciones como series de potencias

La serie geométrica se puede escribir en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

donde $a = 1$ y $r = x$. Esta serie es convergente si $|x| < 1$.

El valor al cual converge la serie es $S = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1-x}$, por lo tanto

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \text{ si } -1 < x < 1$$

Utilizando la serie anterior como base se puede encontrar el desarrollo en series de potencias para otras funciones como se ilustra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 1: Obtener la serie de potencias para una función

Obtenga una representación en series de potencias para la función y obtenga intervalo de convergencia

$$f(x) = \frac{1}{6+x}$$

Solución

Para utilizar la serie base,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \text{ si } -1 < x < 1$$

es necesario expresar la función $\dfrac{1}{6+x}$ en la forma $\dfrac{1}{1-r}$, realizando algunas operaciones algebraicas

$$\frac{1}{6+x} = \frac{1}{6-(-x)} = \frac{1}{6\left[1-\left(-\frac{x}{6}\right)\right]}$$

Ahora podemos expresar la función como una serie con $r = -\dfrac{x}{6}$

$$\frac{1}{6+x} = \frac{1}{6\left[1-\left(-\frac{x}{6}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{6}\right)^n = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{6^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{6\cdot 6^n}$$

$$\frac{1}{6+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{6^{n+1}}$$

$$\frac{1}{6+x} = \frac{1}{6} - \frac{x}{36} + \frac{x^2}{216} - \frac{x^3}{1296} + \cdots$$

Como es una serie geométrica, esta converge para $|r| < 1$, es decir

$$\left|-\frac{x}{6}\right| < 1$$

$$-1 < -\frac{x}{6} < 1$$

$$-6 < -x < 6$$

$$6 > x > -6$$

El intervalo de convergencia es $(-6,6)$

Ejemplo 2: Obtener la serie de potencias para una función

Obtenga una representación en series de potencias, el intervalo de convergencia para la función y obtenga los primeros cuatro términos de la serie

$$f(x) = \frac{x^3}{4+x^2}$$

Solución

Para utilizar la serie base,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \text{ si } -1 < x < 1$$

es necesario expresar la función $\frac{1}{4+x^2}$ en la forma $\frac{1}{1-r}$, realizando algunas operaciones algebraicas y luego multiplicarla por x^3

$$\frac{x^3}{4+x^2} = x^3\cdot\frac{1}{4-(-x^2)} = x^3\cdot\frac{1}{4\left[1-\left(-\frac{x^2}{4}\right)\right]} = \frac{x^3}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{x^3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n = \frac{x^3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^3}{4}\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{4^{n+1}}$$

Observe que para la sumatoria la variable es n, por lo que x actúa como una constante que puede salir y entrar a la sumatoria.

Para encontrar el intervalo de convergencia hay que resolver la desigualdad

$$|r| < 1$$

$$\left|\frac{-x^2}{4}\right| < 1$$

$$|x^2| < 4$$

$$-4 < x^2 < 4$$

$$-2 < x < 2$$

Por lo que el intervalo de convergencia es $(-2,2)$.

Desarrollando los primeros cuatro términos de la serie

$$\frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{256} + \cdots$$

Derivación e integración de series de potencias

Si la función definida por la serie de potencias

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces se puede derivar e integrar. Su derivada e integral están se obtienen derivando o integrando cada término de la serie. Como la serie es un polinomio su derivada e integral es muy fácil de calcular

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$\int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + c_3\frac{(x-a)^4}{4} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Las fórmulas anteriores se suelen escribir en la forma

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$$

$$\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int\left[c_n(x-a)^n\right]$$

Las derivadas e integrales de series de potencias permiten obtener el desarrollo en series de potencias de otras funciones, integrando o derivando la función

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Al derivar a ambos lados la ecuación anterior se tiene

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-x}\right] = \frac{d}{dx}\left[1 + x + x^2 + x^3 + \cdots +\right] = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right]$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

Mientras que si integramos la serie tenemos

$$\int \frac{1}{1-x}dx = \int\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right)dx = \int\left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right]dx$$

$$-\ln(1-x) = C + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = C + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Multiplicando ambos lados por -1 se tiene

$$\ln(1-x) = C - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots = C - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

Para determinar el valor de la constante C se evalúa ambos lados para $x = 0$, de donde se obtiene

$$\ln(1-0) = C - 0 - \frac{(0)^2}{2} - \frac{(0)^3}{3} - \frac{(0)^4}{4} - \cdots$$

$$0 = C$$

Con lo cual el desarrollo en series para la función $\ln(1-x)$ es

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

Ejemplo 3: Integral de una serie de potencias

a. Obtenga una serie de potencias para la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

b. Integre la serie anterior para obtener una serie de potencias para la función $\tan^{-1} x$.

c. Utilice los primeros 5 términos de la serie anterior para aproximar el valor de la integral $\tan^{-1}(0.25)$

Solución

a. Para utilizar la serie base,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \text{ si } -1 < x < 1$$

es necesario expresar la función $\frac{1}{1+x^2}$ en la forma $\frac{1}{1-r}$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

Observe que para la sumatoria la variable es n, por lo que x actúa como una constante que puede salir y entrar a la sumatoria.

Para encontrar el intervalo de convergencia hay que resolver la desigualdad

$$|r| < 1$$

$$\left|-x^2\right| < 1$$

$$\left|x^2\right| < 1$$

$$-1 < x^2 < 1$$

$$-1 < x < 1$$

Por lo que el intervalo de convergencia es $(-1,1)$.

Algunos términos de la serie anterior son los siguientes

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

b. Al integrar la serie con respecto a x se tiene

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int\left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots\right)dx = \int\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right]dx$$

$$\tan^{-1}(x) = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Para hallar el valor de la constante se sabe que, $\tan^{-1}(0) = 0$.

$$0 = C + x - \frac{0^3}{3} + \frac{0^5}{5} - \frac{0^7}{7} + \frac{0^9}{9} - \ldots$$

$$C = 0$$

La serie para la función tangente inversa es entonces

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

c. Al usar los primeros 5 términos para evaluar $\tan^{-1}(0.25)$

$$\tan^{-1}(0.25) = (0.25) - \frac{(0.25)^3}{3} + \frac{(0.25)^5}{5} - \frac{(0.25)^7}{7} + \frac{(0.25)^9}{9}$$

$$\approx 0.24498$$

Al obtener el valor exacto utilizando una calculadora científica da 0.24498

Ejercicios

1.

Encuentre una representación como serie de potencias centrada en cero para la función

$$f(x) = \frac{1}{12 - x}$$

Seleccione una:

- a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^n}{12^{n+1}}$
- b. Ninguna de las otras es correcta
- c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{12^n} + 1$
- d. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{12^n}$
- e. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{12^{n+1}}$
- f. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{12^n+1}$

2.

Encuentre una representación como serie de potencias centrada en cero para la función

$$f(x) = \frac{1}{6 + x}$$

Seleccione una:

- a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{6^n} + 1$
- b. Ninguna de las otras es correcta
- c. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6^{n+1}}$
- d. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{6^{n+1}}$
- e. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^n}{6^{n+1}}$
- f. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{6^n+1}$

3.

Encuentre la serie de Maclaurin para la función

$$f(x) = \frac{4}{1-2x}$$

Seleccione una:

- a. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- b. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n+2} \frac{x^{2n}}{(n!}$
- c. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!}$
- d. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- e. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} 2^{n+2} x^n$

4,

Encuentre la serie de Maclaurin para

$$f(x) = \frac{125}{1+5x}$$

Seleccione una:

- a. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} 5^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!}$
- b. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} 5^{n+3} x^n$
- c. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- d. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 5^{2n+2} \frac{x^{2n}}{n!}$
- e. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 5^{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

5.

Obtenga una serie centrada en $a = -2$ que represente a la función

$$f(x) = \frac{3}{x+6}$$

Seleccione una:

- a. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4^{n+1}} (x-2)^n$
- b. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4^{n+1}} (x+2)^n$
- c. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{4^{n+1}} (x+2)^n$
- d. NINGUNA OPCIÓN ES CORRECTA
- e. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{4^{n+1}} (x-2)^n$

6.

Determine un polinomio de Maclaurin de grado 4 para aproximar la función

$$f(x) = \ln(1+x)$$

luego utilice este polinomio para calcular la integral

$$\int_0^1 \ln(1+3x^2)dx$$

Responda usando dos decimales.

Respuesta: