5.7 Series de potencias

OBJETIVOS

- Establecer si una serie de potencias es convergente o divergente.
- Encontrar el intervalo de convergencia de una serie de potencias.
- Analizar si una serie de potencias es convergente en los extremos del intervalo.

En esta sección se construye una serie en términos de *x*. Esta serie se utiliza para construir un polinomio infinito, que más adelante será utilizado representar funciones trascendentes.

Series de potencias

Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

donde a_n es una expresión en términos de n y x es una constante, recibe el nombre de serie de potencias. En forma más general, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

se dice que es una serie de potencias con centro en c .

Una serie de potencias puede interpretarse como una función, definida como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

en donde el dominio de esta función está dado por todos los valores de x para los cuales la serie converge. Para determinar el dominio de una serie de potencias es necesario analizar su convergencia, utilizando el criterio del cociente.

Cuando se analiza la convergencia de una serie de potencias se utiliza el teorema siguiente

Teorema

Para una serie de potencias con centro en *c,* ocurre una y sol una de las afirmaciones siguientes.

1. La serie converge sólo solo para $x = c$.
2. Existe un número positivo R tal que la serie converge cuando $|x-c| < R$, y diverge cuando $|x-c| > R$. El número R se llama radio de convergencia.
3. La serie es convergente para todo número x.

Si la serie converge sólo cuando $x = c$, el radio de convergencia es $R = 0$. Si la serie converge para todo real x el radio de convergencia es $R = \infty$, y el dominio de la función es $(-\infty, \infty)$. Si la serie converge para un número R, el dominio de la función puede ser alguno de los intervalo siguientes

$$(c-R, c+R), \qquad [c-R, c+R) \qquad (c-R, c+R], \qquad [c-R, c+R]$$

La convergencia en los extremos del intervalo debe analizarse por separado, para cada número, utilizando los criterios generales de series.

Ejemplo 1: Análisis de serie de potencias

Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)^2}$$

Solución

Primero se utiliza el criterio del para analizar la convergencia

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+1+1)^2}}{\frac{3^n x^n}{(n+1)^2}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{n+1}(n+1)^2}{3^n x^n (n+2)^2}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3\cdot 3^n x \cdot x^n (n+1)^2}{3^n x^n (n+2)^2}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3x(n+1)^2}{(n+2)^2}\right|
\end{aligned}$$

Observe ahora que la variable del límite es n, por lo que x se toma como una constante y se puede sacar afuera del límite

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |3x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}\right|$$

Ahora se calcula el límite, utilizando las propiedades de los límites, para este problema el límite tiene valor de 1.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= |3x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}\right| \\
&= |3x|(1) \\
&= |3x|
\end{aligned}$$

Por el criterio del cociente, la serie es convergente si $|3x| < 1$, esto es

$$3|x| < 1$$

$$|x| < \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, el radio de convergencia es $R = \frac{1}{3}$ y el intervalo abierto de convergencia es

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

Ahora debe analizarse la convergencia en los extremos del intervalo, es decir cuando $x = \frac{1}{3}$ y cuando $x = -\frac{1}{3}$.

Este análisis se hace en forma independiente para cada valor.

Para $x = \dfrac{1}{3}$ se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

Esta serie es convergente por el criterio de la integral o bien por el criterio de comparación al compararla con una serie P, $p = 2 > 1$, por lo tanto es convergente.

Para $x = -\dfrac{1}{3}$ se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

que es una serie alternante. Como $b_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ tiene valores positivos y decrecientes y además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$$

La serie es convergente. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es:

$$-\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 2: Análisis de serie de potencias

Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n 5^n}{n 3^{2n}}$$

Solución

Se utiliza criterio del cociente para analizar la convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(x+3)^{(n+1)} 5^{(n+1)}}{(n+1) 3^{2(n+1)}}}{\dfrac{(x+3)^n 5^n}{n 3^{2n}}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+3)^{(n+1)} 5^{(n+1)} \cdot n 3^{2n}}{(n+1) 3^{2(n+1)} \cdot (x+3)^n 5^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+3)^{(n+1)} \cdot 5^{(n+1)} \cdot n \cdot 3^{2n}}{(x+3)^n \cdot 5^n \cdot (n+1) \cdot 3^{2n+2}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5(x+3)n}{3^2 (n+1)} \right|$$

$$= \left| \frac{5(x+3)}{9} \right| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right|$$

$$= \left| \frac{5(x+3)}{9} \right| (1)$$

$$= \left| \frac{5(x+3)}{9} \right|$$

Por el criterio del cociente, la serie es convergente si $\left|\frac{5(x+3)}{9}\right| < 1$ esto es si

$$|x+3| < \frac{9}{5}$$

Por lo que el radio de convergencia es $R = \frac{9}{5}$ y el intervalo de convergencia es

$$-\frac{9}{5} < x+3 < \frac{9}{5}$$

$$-\frac{9}{5} - 3 < x < \frac{9}{5} - 3$$

$$-\frac{24}{5} < x < -\frac{6}{5}$$

Se deja al estudiante que analice la convergencia en los extremos del intervalo abierto para determinar el intervalo final.

Solo falta analizar la convergencia en los extremos del intervalo.

Si $x = -\frac{6}{5}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n 5^n}{n3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{6}{5}+3\right)^n 5^n}{n3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{9}{5}\right)^n 5^n}{n3^{2n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n 5^n}{n5^n 3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n} 5^n}{n5^n 3^{2n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Que es una serie P, con $p = 1$. Como p no es mayor que 1, la serie es divergente.

$x = -\frac{24}{5}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n 5^n}{n3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{24}{5}+3\right)^n 5^n}{n3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{9}{5}\right)^n 5^n}{n3^{2n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 9^n 5^n}{n5^n 3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} 5^n}{n5^n 3^{2n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Que es una serie alternante con valores de $b_n = \frac{1}{n}$, decrecientes cuando n tiende al infinito y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Entonces la serie es convergente.

El intervalo de convergencia es

$$-\frac{24}{5} \le x < -\frac{6}{5}$$

Ejemplo 3: Análisis de serie de potencias

Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^n (x+2)^{2n}}{(n!)^2}$$

Solución

Antes de comenzar es conveniente recordar la definición de factorial de un número

$$\begin{aligned} n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \\ (n+1)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1) \\ (n+2)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)(n+2) = n! \cdot (n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Utilizando el criterio del cociente para analizar la convergencia.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{(n+1)+1} 3^{n+1} (x-2)^{2(n+1)}}{\left((n+1)!\right)^2}}{\dfrac{(-1)^{n+1} 3^n (x-2)^{2n}}{(n!)^2}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{(n+1)+1} 3^{n+1} (x-2)^{2(n+1)} (n!)^2}{(-1)^{n+1} 3^n (x-2)^{2n} \left((n+1)!\right)^2}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2} 3^{n+1} (x-2)^{2n+2} (n!)(n!)}{(-1)^{n+1} 3^n (x-2)^{2n} (n+1)!(n+1)!}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)3(x-2)^2 (n!)(n!)}{(n!)(n+1)(n!)(n+1)}\right| \\ &= \left|-3(x-2)^2\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)(n+1)}\right| \\ &= \left|-3(x-2)^2\right|(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como el límite es igual a 0 y $0 < 1$. Esto nos indica que la serie converge para cualquier valor de x, es decir que el radio de convergencia es infinito y el intervalo de convergencia es

$$(-\infty, \infty)$$

Ejercicios

1.

Determine el extremo izquierdo del intervalo abierto de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{(x+10)^n}{7^n}$$

Respuesta:

2.

Dada la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{2^n \ln(n)}$$

si se sabe que es convergente, determine el extremo derecho del intervalo abierto de convergencia

Respuesta:

3.

Determine el intervalo y radio de convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{(x-3)^n}{5^n}$$

Seleccione una:

- a. $I : (\frac{-4}{5}, \frac{6}{5}), R = 1.$
- b. $I : (\frac{-2}{5}, \frac{2}{5}), R = \frac{2}{5}.$
- c. Ninguna de las otras es correcta.
- d. $I : (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}), R = \frac{2}{3}.$
- e. $I : (\frac{1}{2}, \frac{11}{2}), R = \frac{5}{2}.$

4.

Determine el intervalo y radio de convergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}(x+1)^n}{2^{3n}}$$

Seleccione una:

- a. $I:(-\frac{3}{2},\frac{7}{2}), R=\frac{5}{2}$.
- b. $I:(\frac{2}{3},\frac{4}{3}), R=\frac{1}{3}$.
- c. $I:(-\frac{17}{9},-\frac{1}{9}), R=\frac{8}{9}$.
- d. $I:(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}), R=\frac{3}{2}$.
- e. Ninguna de las otras es correcta.

5.

Determine el intervalo y radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{2^{3n}}\left(\frac{x}{4}\right)^n$$

Seleccione una:

- a. Ninguna de las otras es correcta
- b. $I:(-\frac{32}{9},\frac{32}{9}), R=\frac{32}{9}$
- c. $I:(-\frac{9}{32},\frac{9}{32}), R=\frac{9}{32}$
- d. $I:(-\frac{9}{8},\frac{9}{8}), R=\frac{9}{8}$
- e. $I:(-\frac{8}{9},\frac{8}{9}), R=\frac{8}{9}$