5.6 El criterio del cociente y el criterio de la raíz

OBJETIVOS

- Establecer si una serie es convergente o divergente utilizando el criterio del cociente.
- Establecer si una serie es convergente o divergente utilizando el criterio de la raíz.

Dos pruebas muy importantes para establecer si una serie es convergente o divergente no se presentan en esta sección. Estos criterios son de gran utilidad para series que contienen factoriales funciones exponenciales y raíces.

Convergencia absoluta

Como ya se ha estudiado, algunas series tienen solamente términos positivos, mientras que otras tienen signos alternantes, los siguientes teoremas utilizan el valor absoluto para establecer la convergencia de algunas series

Serie absolutamente convergente

Una serie $\sum a_n$ se llama absolutamente convergente, si la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ es convergente.

Serie condicionalmente convergente

Una serie $\sum a_n$ se llama condicionalmente convergente, si es convergente, pero la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ no es convergente.

Es claro que está ultima definición se aplica a series alternantes ya que una serie que tiene solamente términos positivos y es convergente, entonces también es absolutamente convergente.

El siguiente teorema puede ser de utilidad para establecer la convergencia de algunas series alternantes.

Teorema

Si una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.

Ejemplo 1: Usando el teorema de la convergencia absoluta

Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

Solución

Observe que la serie es alternante, es decir que tiene términos positivos y negativos. Para analizar si es absolutamente convergente debemos tomar todos los términos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

Así la serie, es una serie P con $p = 3 > 1$, que es una serie convergente.

Por lo tanto, la serie es absolutamente convergente y condicionalmente convergente.

S se hubiera utilizado el criterio de la serie alternante se hubiera probado que la serie es condicionalmente convergente, pero no que es absolutamente convergente.

El criterio del cociente

Si $\sum a_n$ es una serie con términos distintos de cero, entonces

1. $\sum a_n$ convergente si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$.
2. $\sum a_n$ es divergente si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ o si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$.
3. El criterio del cociente no es concluyente si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$.

Este criterio es útil para calcular la convergencia de series que contienen factoriales, funciones exponenciales. El criterio establece que, si el límite es menor que 1 la serie converge, si el límite es mayor que 1 la serie diverge y cuando el límite es igual a 1, el criterio no es aplicable y será necesario utilizar otro criterio para analizar la convergencia de la serie.

Ejemplo 2: Usando el criterio del cociente

Determine si la serie es convergente o divergente

$$\sum \frac{n!}{(-10)^n}$$

Solución

Recuerde que el factorial de un número n, se define como

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n$$

$$(n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n\cdot(n+1) = n!(n+1)$$

$$(n+2)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n\cdot(n+1)(n+2) = (n+1)!(n+2)$$

Aplicando el criterio del cociente del cociente se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)!}{(-10)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{(-10)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!(-10)^n}{n!(-10)^{n+1}}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n\cdot(n+1)(-10)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n(-10)^n(-10)}\right|$$

Al cancelar los términos comunes al numerador y denominador, se puede calcular fácilmente el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{(-10)}\right| = \infty$$

Como $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, por el criterio del cociente la serie es divergente.

El criterio de la raíz

Dada una serie $\sum a_n$.

1. Si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es convergente.
2. Si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.
3. Si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$, el criterio de la raíz no es concluyente.

Este criterio es útil para calcular la convergencia de series que contienen funciones exponenciales y raíces enésimas. El criterio establece que, si el límite es menor que 1 la serie converge, si el límite es mayor que 1 la serie diverge y cuando el límite es igual a 1, el criterio no es aplicable y será necesario utilizar otro criterio para analizar la convergencia de la serie.

Ejemplo 3: Usando el criterio de la raíz

Determine si la serie es convergente o divergente

$$\sum\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$$

Solución

Aplicando el criterio de la raíz

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n\right|} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+1}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1$. Por el criterio de la raíz la serie es convergente.

Ejemplo 4: Usando el criterio del cociente y el criterio de la raíz

Determine si la serie es convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n}$$

Solución

Aplicando el criterio del cociente tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{e^{2(n+1)}}{(n+1)^{(n+1)}}}{\dfrac{e^{2n}}{n^n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{2(n+1)}n^n}{e^{2n}(n+1)^{(n+1)}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{2n+2-2n}n^n}{(n+1)^{(n+1)}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^2 n^n}{(n+1)(n+1)^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} e^2\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n
\end{aligned}$$

como el límite anterior no es sencillo de calcular resulta que el criterio del cociente no es apropiado.

Aplicando el criterio de la raíz

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{e^{2n}}{n^n}\right|} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(e^2)^n}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^2}{n}\right) \\
&= e^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= e^2(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0 < 1$, por el criterio de la raíz la serie es convergente.

Estrategias para analizar la convergencia o divergencia de series

Dada una serie $\sum a_n$.

1. Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$. Si el límite es distinto de cero la serie es divergente, si el límite es cero siga con los siguientes pasos.
2. Si la serie es de alguno de los tipos especiales: geométrica, serie P, telescópica o alternante, aplique los criterios de convergencia que correspondientes.
3. Si la serie no es de un tipo especial, observe si la función es integrable, si es así aplique el criterio de la integral.
4. Si la serie contiene factoriales y funciones exponenciales aplique el criterio del cociente.
5. Si la serie contiene raíces enésimas o funciones exponenciales puede utilizar el criterio de la raíz.
6. Los criterios de comparación pueden ser útiles cuando se compara una serie con otra más sencilla cuya convergencia se establece fácilmente.

Ejercicios