5.5 Series alternantes

OBJETIVOS

- Establecer si una serie es alternante.
- Determinar si una serie alternante es convergente o divergente utilizando su criterio.

Los criterios vistos hasta ahora para establecer si una serie es convergente requieren que la serie tenga únicamente términos positivos. En esta sección se estudia la convergencia de series cuyos signos se alternan entre positivos y negativos.

Serie alternante

Una serie alternante es aquella cuyos términos son positivos y negativos, alternándose en signo, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots, \quad a_n > 0$$

como por ejemplo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$$

es una serie geométrica alternante con $r = -\frac{1}{2}$. La convergencia de las series alternantes puede ser determinada con la siguiente prueba

Criterio de la serie alternante

La serie alternante es convergente si satisface las condiciones siguientes

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $a_{n+1} \le a_n$ para todo n.

Es decir que la serie alternante converge si los valores de a_n son decrecientes y tienden a cero cuando n tiende al infinito.

Ejemplo 1: Usando el criterio de la serie alternante

Determine si la serie es convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-2)^{n-1}}$$

Solución

Primero observe que la serie puede expresarse como una serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^{n-1}}$$

Donde $a_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

Ahora apliquemos el primer criterio de las series alternantes

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{n-1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{D_n(n)}{D_n\left(2^{n-1}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}\ln 2} = 0\end{aligned}$$

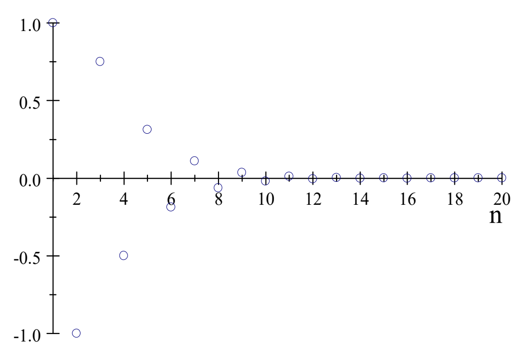
Como se satisface el primer criterio, pasemos al segundo criterio

$a_{n+1} \le a_n$ será verdadero si la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente, o lo que es lo mismo si la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x}{2^{x-1}}$ es negativa

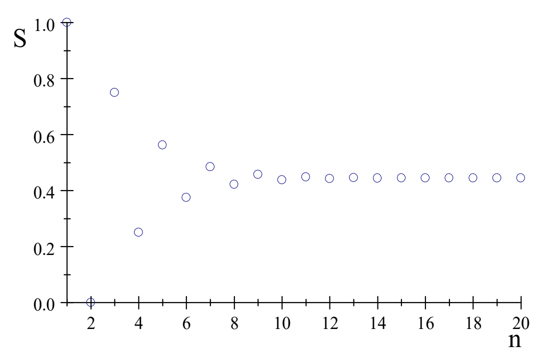
$$D_x\left(\frac{x}{2^{x-1}}\right) = \frac{2^{x-1} - x2^{x-1}\ln 2}{(2^{x-1})^2} = \frac{1 - x\ln 2}{2^{x-1}}$$

Si $x > 1$ la derivada es negativa y por lo tanto la sucesión es decreciente y como se satisfacen las dos condiciones la serie es convergente.

La figura siguiente muestra la sucesión de términos para $1 \le n \le 20$



La figura siguiente muestra las sumas parciales para los primeros 20 términos, donde claramente puede observarse que la serie es convergente



Ejemplo 2: Usando el criterio de la serie alternante

Determine si la serie es convergente o divergente

$$\sum_{n=2}^{\infty} \cos n\pi \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$$

Solución

Lo primero que hay que observar en esta serie es que

Para $n = 2$ se tiene que $\cos 2\pi = 1$

Para $n = 3$ se tiene que $\cos 3\pi = -1$

Para $n = 4$ se tiene que $\cos 4\pi = 1$

Donde se puede ver que la función trigonométrica únicamente genera los signos alternantes de la serie, entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} \cos n\pi \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$$

Que claramente es una serie alternante con $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+2}$.

Al aplicar el criterio de la serie alternante se tiene

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

Ahora debemos verificar que $a_{n+1} \le a_n$, para ello utilizamos la primera derivada de la función $f(n) = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+2}$

$$f'(n) = D_n\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right) = \frac{(n+2)\frac{1}{2}(n+1)^{-1/2} - (n+1)^{1/2}(1)}{(n+2)^2}$$

$$= \frac{\frac{(n+2)}{2(n+1)^{1/2}} - (n+1)^{1/2}}{(n+2)^2} = \frac{(n+2) - 2(n+1)}{2(n+2)^{1/2}(n+2)^2}$$

$$= \frac{-n+1}{2(n+2)^{5/2}}$$

Como $n \ge 2$, se tiene que la primera derivada es negativa y entonces $a_{n+1} \le a_n$.

Se concluye que la serie es convergente por el criterio de la serie alternante.

Ejercicios

1.

Dada la siguiente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{2n+8}$$

se puede decir que:

Seleccione una:

- a. El cuarto término es 0.29 y es divergente.
- b. El cuarto término es 0.31 y es condicionalmente convergente.
- c. El cuarto término es 0.31 y es absolutamente convergente.
- d. El cuarto término es -0.29 y es divergente.
- e. Ninguna de la otras opciones es correcta.

2.

Dada la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{n}{n^4+49}$$

determine la suma de los primeros dos términos y luego diga si es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

Seleccione una:

- a. S_2 = -0.01, absolutamente convergente.
- b. S_2 = -0.01, divergente
- c. S_2 = -0.01, no se puede aplicar ninguna prueba.
- d. S_2 = -0.01, condicionalmente convergente.
- e. Ninguna de las otras opciones es correcta.

3.

De las siguientes series, diga cuál es alternante.

$$I)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n}\frac{n^n}{n!}$$

$$II)\sum_{n=0}^{\infty}sin(\frac{n\pi}{2})$$

$$III)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n cos(n\pi)$$

$$IV)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$$

Seleccione una:

- a. $I)$
- b. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- c. $IV)$
- d. $II)$
- e. $III)$

4.

Dada la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{10^n}$$

se puede concluir que es:

Seleccione una:

- a. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- b. Divergente.
- c. No se puede concluir.
- d. Absolutamente convergente.
- e. Condicionalmente convergente.