5.3 El criterio de la integral

OBJETIVOS

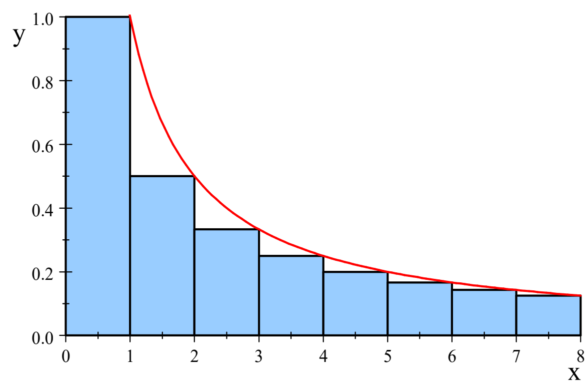
- Utilizar el criterio de la integral para calcular la convergencia o divergencia de series que tienen una fórmula integrable.
- Identificar una serie P y utilizar su criterio para establecer si converge o diverge.
- Estimar la suma de una serie utilizando integración.

El criterio de la integral

Considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

es posible interpretar esta serie como la suma de áreas de rectángulos de base 1 y altura $\frac{1}{n}$. La figura siguiente ilustra esta situación



La figura anterior muestra que la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es menor que $1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$. Esto sugiere que, si la integral impropia es convergente, entonces la serie debe ser convergente. El teorema siguiente utiliza el hecho anterior para establecer cuando una serie es convergente o divergente.

El criterio de la integral

Suponga que *f* es una función continua, positiva y decreciente en el intervalo $[1,\infty)$ y sea $a_n = f(n)$.

1. Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

2. Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Este criterio solo nos sirve para establecer si la serie es convergente o divergente, el hecho de que calculemos el valor de la integral impropia no significa que la serie converja a ese mismo valor, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_1^{\infty} f(x)dx$$

El criterio de la integral es muy útil para calcular la convergencia de series que están definidas por funciones que se pueden integrar. Para series definidas por expresiones no integrables es necesario utilizar otros criterios.

Ejemplo 1: Usando el criterio de la integral

Utilice el criterio de la integral para determinar si la serie es convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Solución

La función asociada es $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, Esta función es positiva en el intervalo $[1,\infty)$, ahora calculemos la derivada para establecer si es decreciente en ese intervalo

$$f'(x) = D_x\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Como la derivada es negativa para todo número mayor que 1, se tiene que la función es decreciente en $[1,\infty)$ y se puede aplicar el criterio de la integral.

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2+1}dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\tan^{-1} t\right]_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\tan^{-1} t - \frac{\pi}{4}\right] \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Como la integral converge a $\dfrac{\pi}{4}$, se concluye que la serie es convergente.

Ejemplo 2: Usando el criterio de la integral

Utilice el criterio de la integral para determinar si la serie es convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

Solución

Para aplicar formalmente el criterio, la función debe ser decreciente y positiva en el intervalo $[1,\infty)$. Calculando la primera derivada de la función

$$D_x\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(2x)}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{x(1-2\ln x)}{x^4}$$
$$= \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

La función es positiva y decreciente para números mayores que 2.

Al observar la serie, parece ser que se puede integrar utilizando integración por partes.

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\ln}{x^2}dx$$

Utilizando integración por partes, para calcular la integral

$$u = \ln x \qquad dv = \frac{1}{x^2}dx = x^{-2}dx$$
$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

Entonces

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = (\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right) - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\,dx$$
$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}\,dx$$
$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

Evaluando la integral

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[\left(-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t}\right) - \left(-\frac{\ln 1}{1} - \frac{1}{1}\right)\right]$$
$$= 0 + 1$$
$$= 1$$

Es decir que la integral impropia es convergente y converge a 1.

Se concluye que la serie es convergente.

Serie P

La serie P se define como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

Como puede verse es una serie cuyos términos tienen la función potencia en el denominador, y la constante 1 en el numerador, p es el exponente constante.

La serie es convergente si $p > 1$ y es divergente si $p \le 1$.

En general la serie P se puede analizar utilizando el criterio de la integral, pero como se presente frecuentemente en varios problemas de series se ha establecido para ella su propio criterio.

Ejemplo 3: Usando el criterio de la serie *P*

Analice si la serie es convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Solución

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

es una serie p con $p = \frac{1}{2} \leq 1$. Por lo tanto la serie es divergente.

Estimación de sumas

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge de acuerdo a la prueba de la integral y el error cometido al calcular la serie está dado por $R_n = S - S_n$, donde S es el valor exacto de la serie y S_n es el valor de la suma usando los n primeros términos, entonces

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n \leq \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

es decir que el error cometido al calcular una serie usando los n primeros términos, siempre es menor que $\int_{n}^{\infty} f(x)dx$

si se suma S_n a ambos lados de la desigualdad anterior se tiene

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq R_n + S_n \leq S_n + \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

como $S = S_n + R_n$

se obtiene las expresiones que permiten acotar el valor de S para un n cualquiera.

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq S \leq S_n + \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

La expresión anterior nos permite estimar el error al calcular el valor de la serie usando sus n primeros términos

$$R_n \approx \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

Ejemplo 4: Calculando una serie y estimando el error

a. Calcule S_{10} para la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

b. Estime el error cometido al calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ con $n = 10$

c. Encuentre una cota superior y una cota inferior para S con $n = 10$

d. Utilice el promedio de las cotas superior e inferior para estimar el valor de S

Solución

a. Utilizando una calculadora con sumatorias o un programa matemático o haciéndola paso a paso se obtiene

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\frac{1}{81}+\frac{1}{100}$$

$$= \frac{1968329}{1270080} = 1.5498$$

b.

$$R_{10} \approx \int_{10}^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{10}^{t}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{10}^{t}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} = 0.1$$

entonces $R_{10} \le 0.1$

c. Para calcular una cota superior y una inferior utilizamos la fórmula

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le S \le S_n + \int_{n}^{\infty} f(x)dx$$

La cual aplicada a nuestro problema es

$$S_{10} + \int_{11}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx \le S \le S_{10} + \int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

$$S_{10} + \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{11}^{t} \le S \le S_{10} + \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{10}^{t}$$

$$S_{10} + \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{11}\right) \le S \le S_{10} + \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{10}\right)$$

$$S_{10} + \frac{1}{11} \le S \le S_{10} + \frac{1}{10}$$

$$1.5498 + \frac{1}{11} \le S \le 1.5498 + \frac{1}{10}$$

$$1.6407 \le S \le 1.6498$$

d. Tomando el promedio entre la cota superior e inferior se obtiene una mejor estimación de S

$$S \approx \frac{1.6407 + 1.6498}{2} = 1.64525.$$

El valor exacto de esta serie se sabe que es igual a $\frac{\pi^2}{6} = 1.6449341$

Ejercicios

1.

Determine para que valores de p la siguiente serie es convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2+3)^p$$

Seleccione una:

- a. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- b. p < -1.
- c. p > -1.
- d. p < 1.
- e. p > 1.

2.

Para la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$$

los valores que debe de tomar "p" para que sea convergente son:

Seleccione una:

- a. p<0.
- b. p>1.
- c. p<1.
- d. p=0.
- e. Ninguna de las otras es correcta.

3.

Utilizando el criterio de la integral para la siguiente serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{3p+2}}$$

será convergente si:

Seleccione una:

- a. $p < -\frac{1}{3}$.
- b. $p < -\frac{2}{3}$.
- c. Ninguna de las otras es correcta.
- d. $p > -\frac{2}{3}$.
- e. $p > -\frac{1}{3}$.

4.

De las siguientes series, cual o a cuáles se les puede aplicar la prueba de la integral.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} sen\, n^2$$

Seleccione una:

- a. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- b. (1)
- c. (3)
- d. (4)
- e. (2)