5.2 Series

OBJETIVOS

- Comprender el concepto de serie y su diferencia con una sucesión.
- Entender el concepto de convergencia y divergencia de una serie.
- Utilizar el teorema de la divergencia para probar que una serie es divergente.
- Determinar si una serie es geométrica, utilizar su criterio para saber si converge o diverge y si es convergente calcular su suma.
- Determinar si una serie es telescópica, utilizar su criterio para saber si converge o diverge y calcular su suma.

Series infinitas

Se llama **serie infinita** o simplemente **serie** a la suma infinita de los términos de una sucesión y se representa como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \cdots$$

Las **sumas parciales** de una serie infinita se escriben como

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

en general

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

al considerar cada suma parcial como un término de una sucesión $\{S_n\}$ se tiene la siguiente definición.

Series convergentes y divergentes

La serie infinita

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

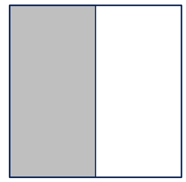
Se dice que es convergente si la sucesión de sumas parciales es convergente, es decir que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

El número ***S*** **es la suma de la serie**. Si el límite no existe se dice que la serie es **divergente**

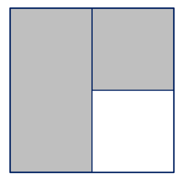
Ejemplo 1: Una serie convergente con suma conocida

Una serie interesante se obtiene a partir de cuadrado de lado 1. Si este cuadrado se divide por la mitad se como se muestra en la figura se obtiene dos rectángulos, el área sombreada es



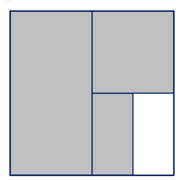
$$A_1 = \left(\frac{1}{2}\right)(1) = \frac{1}{2}$$

Si el área que no está sombreada se divide nuevamente por la mitad, se obtiene una segunda área sombreada cuya área es



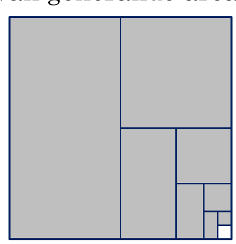
$$A_2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

Al continuar con este proceso y agregar una tercera área sombreada se obtiene



$$A_3 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$$

Al continuar con este proceso, se van generando áreas cada vez más pequeñas



Si se observa el patrón como se van generando las áreas, se ve que la enésima área está dada por

$$A_n = \frac{1}{2^n}$$

Si consideramos las áreas individualmente, se genera una sucesión, cuyos términos son

$$\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}, \cdots,\ \frac{1}{2^n}\right\}$$

Es claro que la sucesión es convergente, como puede verse en la figura, el área del rectángulo más pequeño tiende a cero. Formalmente

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^\infty} = 0$$

Si se suman las áreas de todos los rectángulos generados se obtiene la serie

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Esta serie tiene las sumas parciales siguientes

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Es claro que esta serie es convergente ya que al observar la figura se puede ver que la suma de todas las áreas converge a 1

Esta serie tiene la particularidad que se conoce una expresión para la suma de los n primeros términos, de tal forma que

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

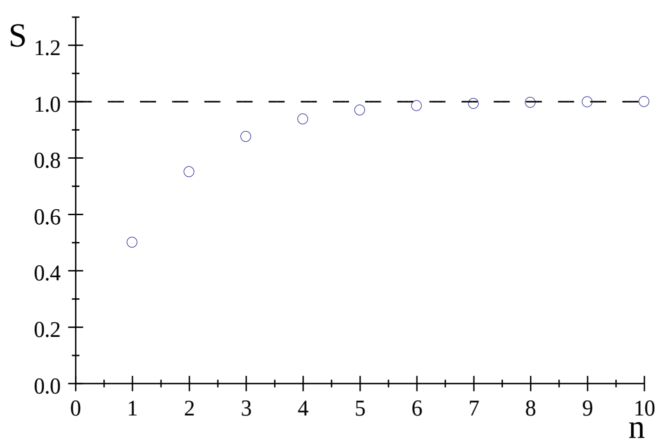
Como

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \frac{D_n\left(2^n - 1\right)}{D_n\left(2^n\right)} = \frac{2^n \ln 2}{2^n \ln 2} = 1$$

Se concluye que la serie anterior es convergente y que converge a 1, como se había obtenido a partir de la gráfica.

En éste caso fue fácil probar la convergencia de la serie pues se tiene la fórmula para la suma de los n términos $S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$. En la mayor parte de los casos no se dispone de éstas fórmulas y la convergencia debe probarse con los teoremas que se dan más adelante.

Una representación gráfica de las primeras 10 sumas parciales de la serie anterior se muestra en la figura siguiente, en donde se ve claramente que la serie converge a 1



En general, es muy difícil y en muchos casos imposible encontrar una fórmula para los primeros n términos de una serie. En las siguientes secciones se estudian algunas series especiales y se analiza su convergencia.

Propiedades de las series infinitas

Propiedades de las series infinitas

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes, y c es una constante, entonces

1. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

El siguiente teorema establece que si una serie es convergente, entonces el límite del n-ésimo términio debe ser 0

Teorema

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Este teorema establece que si el límite es cero, la serie puede ser convergente, pero no garantiza que lo sea.

Teorema de la divergencia

Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$ entonces la serie $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Este teorema resulta muy útil para probar la divergencia de una serie, pero en ningún caso sirve para probar la convergencia.

Ejemplo 2: Utilizando el teorema de la divergencia

Analice si la serie dada es convergente o divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

Solución

Para demostrar que una serie es divergente es suficiente calcular $\lim_{n\to\infty} a_n,$ y mostrar que este límite es distinto de cero. Para el caso de que el límite sea cero, se deben utilizar otros criterios para demostrar la convergencia o divergencia.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}}$$
$$= \frac{1+0+0}{1+0} = 1$$

Como el límite es distinto de cero, la serie es divergente.

Serie geométrica

La serie dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots, a \neq 0$$

o bien expresada en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots, a \neq 0$$

donde a es una constante y es llamada la razón, recibe el nombre de **serie geométrica.** Una serie geométrica es convergente si $0 < |r| < 1$. Una característica importante de la serie geométrica es que cuando es convergente su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^{n} = \frac{a}{1-r}$$

En ciertas circunstancias es conveniente que la serie comience con $n = 1$ mientras que en algunos casos es conveniente que la serie inicie con $n = 0$

Si $|r| > 1$ la serie geométrica es divergente.

Ejemplo 3: Serie geométrica convergente

Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$$

a. Muestre que es una serie geométrica.

b. Determine si es convergente o divergente.

c. Si es convergente encuentre su suma.

Solución

a. Como el valor inicial de la suma es para $n = 1$, hay que expresar la serie en la forma

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Utilizando las leyes de los exponentes se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{4^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{4^n}\cdot\frac{4^{-1}}{4^{-1}}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{-1}(-3)^{n-1}}{4^{n-1}}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

que es una serie geométrica con $a = \frac{1}{4}$ y $r = -\frac{3}{4}$.

b. Como $|r| = \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4} < 1$ la serie es convergente y su suma es

c. La suma infinita es

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{7}$$

Ejemplo 4: Serie geométrica convergente

Escriba el número decimal periódico $3.0\overline{404}$ como una serie geométrica y calcule el valor de su suma

Solución

Un número decimal periódico siempre puede escribirse como una suma infinita en la forma siguiente

$$\begin{aligned}3.0\overline{404} &= 3.04040404\ldots\\ &= 3 + 0.04 + 0.0004 + 0.000004 + \cdots\\ &= 3 + \frac{4}{100} + \frac{4}{10000} + \frac{4}{1000000} + \cdots\\ &= 3 + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^4} + \frac{4}{10^6} + \cdots + \frac{4}{10^{2n}}\\ &= 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{10^{2n}}\end{aligned}$$

Para expresar la serie anterior como una serie geométrica se procede como en el ejemplo anterior, utilizando las leyes de los exponentes

$$3.04\overline{04} = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{10^{2n}}$$

$$= 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\left(10^2\right)^n} = 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 100^{-1}}{(100)^n \cdot 100^{-1}}$$

$$= 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 100^{-1}}{(100)^{n-1}}$$

$$= 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}$$

$$= 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1}$$

La serie anterior es una serie geométrica con $a = \frac{1}{25}$ y $r = \frac{1}{100}$, como $|r| < 1$ la serie es convergente y converge a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{25}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{99}{100}} = \frac{100}{(25)(99)} = \frac{4}{99}$$

Por lo tanto, el número $3.04\overline{04}$ puede escribirse como

$$3.04\overline{04} = 3 + \frac{4}{99} = \frac{301}{99}$$

Serie Telescópica

Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_n - b_{n+1})$$

recibe el nombre de serie telescópica. Observe que al desarrollar la suma se anulan todos los términos menos el primero y el último, por lo que la suma de una serie telescópica es

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_n - b_{n+1})$$
$$S_n = b_1 - b_{n+1}$$

La serie telescópica es convergente si $\lim_{n\to\infty} b_n$ existe. La suma de esta serie es

$$S = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$$

Ejemplo 5: Serie telescópica

Muestre que la serie dada es una serie telescópica convergente. Calcule su suma.

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

Solución

La fracción $\frac{1}{n(n+2)}$ se puede descomponer en fracciones parciales

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2)+Bn}{n(n+2)}$$

Igualando los numeradores se tiene

$$1 = A(n+2) + Bn$$

De donde se obtiene que $A = \frac{1}{2}$ y $B = -\frac{1}{2}$

Entonces

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$$

y la serie dada se puede expresar como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)} \right)$$

Desarrollando los primeros términos de la serie para verificar que es una serie de forma telescópica se tiene

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14}\right) + \cdots +$$

Observe que todos los elementos de la serie se cancelan menos $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ por lo tanto la serie es telescópica.

Como

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0,$$

la serie es convergente.

Su suma se obtiene sumando los números que no se cancelan y restando el límite

$$S = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{3}{4}$$

Ejercicios sobre series

1.

Determine si la siguiente serie converge, si en caso lo hace calcule su suma, caso contrario (diverge) responda 9999

$$\sum_{n=0}^{\infty} 8\left(\frac{6^{2n+1}}{3^{3n+2}}\right)$$

2.

Determine si la siguiente serie converge, si en caso lo hace calcule su suma, caso contrario (diverge) responda 9999

$$\sum_{n=0}^{\infty} 9\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Respuesta:

3.

Determine si la serie converge o diverge. Si converge, calcule la suma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-3)^{n+1}}{2^{2n-1}}$$

Seleccione una:

- a. Converge y la suma es: $-\frac{48}{7}$
- b. Ninguna opción es correcta.
- c. Converge y la suma es: $\frac{16}{7}$
- d. Converge y la suma es: $\frac{36}{7}$
- e. Diverge.

4.

Determine si la siguiente serie converge, si lo hace calcule su suma, caso contrario (diverge) escriba 9999

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3n(n+2)}$$

5.

Determine si la siguiente serie converge, si lo hace calcule su suma, caso contrario (diverge) escriba 9999

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)(n+5)}$$

6.

Determine si converge ó diverge la serie. Si converge, calcule la suma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+4)(n+5)}$$

Seleccione una:

- a. Converge y la suma es: $\frac{2}{5}$
- b. Converge y la suma es: $\frac{5}{2}$
- c. Converge y la suma es: $\frac{1}{3}$
- d. Diverge.
- e. Ninguna opción es correcta.