5.1 Sucesiones

OBJETIVOS

- Obtener la fórmula para una sucesión cuando se conocen algunos de sus términos.
- Determinar si una sucesión es convergente o divergente.
- Determinar si una sucesión es creciente o decreciente.

Sucesiones

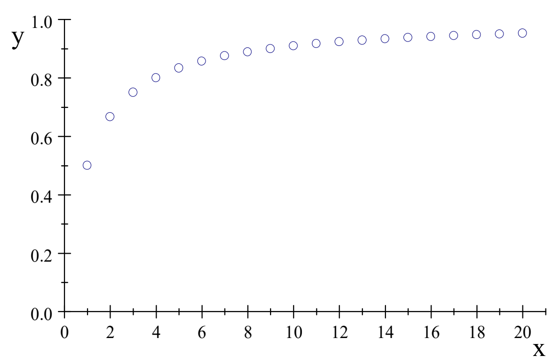
Una sucesión se define como una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos. Una sucesión se suele representar en la forma

$$\{a_n\} = \{f(n)\}$$

Por ejemplo, la sucesión

$$\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots,\frac{n}{n+1}\right\}$$

tiene como primer término $a_1 = \frac{1}{2}$, como segundo término $a_2 = \frac{2}{3}$ y como *n-ésimo* término $\frac{n}{n+1}$. Las sucesiones pueden representarse gráficamente colocando en el eje x los enteros positivos y en el eje y los valores de a_n. La representación gráfica de los primeros 20 términos de la sucesión del ejemplo anterior es



Algunas sucesiones no tienen una fórmula para el término a_n, por ejemplo la **sucesión de Fibonacci,** $\{f_n\}$ en donde cada término se obtiene sumando los dos términos anteriores.

$$\{f_n\} = \{1,\ 1,\ 2{,}3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ldots\}$$

Ejemplo 1: Encontrar la fórmula de una sucesión

Los primeros cuatro términos de una sucesión son:

$$1,-\frac{3}{2},\frac{9}{4},-\frac{27}{8},\ldots$$

a. Encuentre los siguientes dos términos de la sucesión.

b. Encuentre una fórmula para el n-ésimo término.

Solución

a. Observe que los términos de la sucesión se alternan en signo, por otro lado el numerador de cada término siguiente se obtiene multiplicando el numerador anterior por 3, mientras que el denominador se obtiene multiplicando el denominador del término anterior por 2,

Quinto término: $\frac{27(3)}{8(2)} = \frac{81}{16}$ sexto término: $-\frac{81(3)}{16(2)} = -\frac{243}{32}$

b. Para obtener una fórmula que nos permita obtener cualquier término es preciso observar como se genera cada uno de ellos. Observando con más cuidado puede verse que los numeradores de cada término son potencias de 3, mientras que los denominadores son potencias de 2

$$1,-\frac{3}{2},\frac{9}{4},-\frac{27}{8},\ldots = 1,-\frac{3^1}{2^1},\frac{3^2}{2^2},-\frac{3^3}{2^3}$$

$$= \underbrace{\frac{3^0}{2^0}}_{n=1},\underbrace{-\frac{3^1}{2^1}}_{n=2},\underbrace{\frac{3^2}{2^2}}_{n=3},\underbrace{-\frac{3^3}{2^3}}_{n=4}$$

Por otro lado, observe que los exponentes se encuentran desfazados, ya que para $n = 1$ el exponente es 0, para $n = 2$ el exponente es 1 y así sucesivamente. Todo lo anterior sugiere que el n-ésimo término tiene como fórmula

$$\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}$$

Solo queda el problema del signo. Pero realmente generar signos alternos no es un problema ya que con la expresión $(-1)^n$ o bien con $(-1)^{n+1}$ se pueden generar signos alternos. La primera fórmula empieza con signo menos cuando $n = 1$, mientras que la segunda comienza con signo positivo cuando $n = 1$. Por lo tanto la fórmula buscada es

$$\{a_n\} = \frac{(-1)^{n+1}3^{n-1}}{2^{n-1}}$$

Límite de una sucesión

Algunas sucesiones tienen la característica que a medida que n aumenta el valor de los términos a_n se aproximan a cierto número L. En éste caso se dice que la sucesión es convergente y que converge a L, en términos más formales se dice que el límite de una sucesión $\{a_n\}$ es L, si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

Si el límite existe se dice que la sucesión es **convergente** mientras que, si el límite no existe se dice que la sucesión es **divergente.**

Para calcular el límite de una sucesión utilizamos el siguiente teorema

Teorema

Si f es una función tal que $f(n) = a_n$, donde n es un entero positivo y $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

El teorema anterior nos indica que: cuando se conoce la fórmula para el *n-esimo* término de una sucesión, para calcular el límite de la misma, se pueden utilizar todas las reglas que se utilizan para calcular límites de funciones, incluyendo la regla de L'Hospital; reglas que ya se han estudiado en cursos anteriores

Propiedades de los límites de sucesiones

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante entonces

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$
7. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y f es una función continua en L, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

Teorema del valor absoluto

Si $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Este teorema es importante para calcular el límite de sucesiones en donde el signo de los términos se va alternando entre mas y menos. En otras palabras, en una sucesión cuyos términos son alternantes, este teorema permite ignorar el signo de los términos siempre y cuando el valor del límite sea igual a cero.

Teorema del encaje o del emparedado

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ y existe un entero N, tal que $a_n \le c_n \le b_n$ para todo $n > N$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Este teorema permite calcular el límite de una sucesión de manera indirecta, utilizando para ello dos sucesiones, una que tiene todos los términos mayores que la que nos interesa y otra que tiene todos los términos menores que la que nos interesa. Si la mayor y la menor convergen al mismo número L, la serie que nos interesa también converge a L

Ejemplo 2: Determinando si una sucesión es convergente

Determine si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes, si converge establezca el límite.

a. $\left\{\dfrac{n^2}{2^n - 1}\right\}$ **b.** $\left\{2^{\cos n\pi}\right\}$ **c.** $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right\}$

Solución

a. Calculamos el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n - 1}$ utilizando L'Hospital, ya que tiene forma $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{D_n(n^2)}{D_n(2^n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2^n\ln 2}$$

El límite anterior sigue teniendo la forma $\frac{\infty}{\infty}$

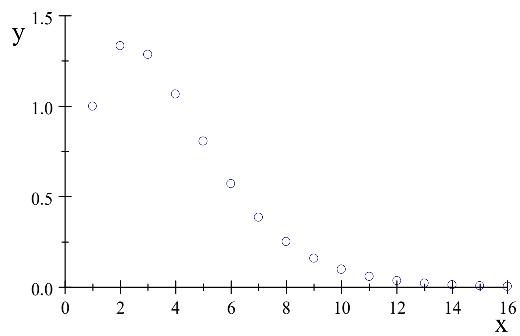
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{D_n(2n)}{D_n(2^n\ln 2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2^n(\ln 2)^2}$$

$$= \frac{2}{(\ln 2)^2 2^\infty} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Por lo tanto, la sucesión es convergente y converge a 0.

Una representación gráfica de esta sucesión para los primeros 16 términos muestra que efectivamente converge a 0



b. Para analizar la convergencia de la sucesión $\left\{2^{\cos n\pi}\right\}$ se calcularán algunos términos de la misma

$$2^{\cos(1\pi)},\ 2^{\cos(2\pi)},\ 2^{\cos(3\pi)},\ 2^{\cos(4\pi)},\ 2^{\cos(5\pi)},\cdots$$

$$2^{-1},\ 2^{1},\ 2^{-1},\ 2^{1},\ 2^{-1},\cdots$$

$$\frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{2},\ 2,\ ,\ \frac{1}{2},\ 2,\ ,\cdots$$

Es decir que los valores de la sucesión se alternan entre $\frac{1}{2}$ y 2. Por lo que la sucesión es divergente. Esto es frecuente en las sucesiones que contienen funciones trigonométricas ya que estas son periódicas y no convergen en el infinito.

c. La sucesión $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right\}$ es alternante entre signos positivos y negativos. En estos casos es posible utilizar el teorema del valor absoluto, el cual es válido únicamente si la sucesión converge a cero.

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$= 0$$

Como el límite de la sucesión con valor absoluto es cero, se concluye que la sucesión $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right\}$ converge a 0

Sucesiones monótonas

Una sucesión es $\{a_n\}$ es creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n > 1$.

Una sucesión $\{a_n\}$ es decreciente $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n > 1$.

Una sucesión es monótona si es creciente o decreciente en todo su dominio.

Ejemplo 3: Determinando si una sucesión es monótona

Determine si la sucesión $a_n = \dfrac{2n}{1+n}$ es monótona

Solución

La sucesión es creciente si $a_n \leq a_{n+1}$. Sustituyendo y desarrollando la desigualdad tenemos

$$a_n \leq a_{n+1}$$

$$\frac{2n}{1+n} \leq \frac{2(n+1)}{1+(n+1)}$$

$$\frac{2n}{1+n} \leq \frac{2n+2}{n+2}$$

como n es positivo podemos pasar a multiplicar los denominadores de un lado a otro de la desigualdad, obteniendo sin que esta cambie su sentido.

$$2n(n+2) \leq (2n+2)(n+1)$$

$$2n^2 + 4n \leq 2n^2 + 4n + 2$$

$$0 \leq 2$$

de donde se concluye que la expresión es verdadera para todo n por lo tanto la sucesión es creciente.

Otra forma de determinar si una sucesión es monótona consiste en calcular la derivada de la función $f(x)$ asociada y probar que la derivada es positiva ó negativa para todo real mayor que cero, lo cual a la vez implica que la sucesión es monótona.

$$f'(x) = D_x\left(\frac{2x}{1+x}\right) = \frac{(1+x)(2)-(2x)(1)}{(1+x)^2} = \frac{2}{(1+x)^2}$$

como puede observarse la derivada es positiva para todo $x > 0$ por lo tanto la función es creciente en el intervalo $(0,\infty)$, lo que indica que la sucesión asociada es creciente y por lo tanto monótona.

Sucesiones acotadas

Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada por arriba** si existe un número M tal que $a_n \leq M$ para todo n. El número M se llama cota superior de la sucesión.

Una sucesión $\{a_n\}$ es **acotada por abajo** si existe un número N tal que $N \leq a_n$ para todo n. El número N se llama cota inferior de la sucesión.
Si una sucesión está acotada por arriba y por abajo entonces la sucesión es **acotada.**

Ejercicios

1.

Determine si la sucesión converge ó diverge, si converge, el valor del limite es: ?

$$\left\{\frac{4(8^n)+4}{8^n}\right\}$$

Seleccione una:

- a. Converge y el limite es: 6.00
- b. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- c. Converge y el limite es: -4
- d. Converge y el limite es: 32
- e. Diverge.
- f. Converge y el limite es: 4 ✔

2.

Dada la la sucesión

$$\left\{2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right\}$$

las cotas inferior y superior son:

Seleccione una:

- a. 1 y 2.
- b. Ninguna de las otras es correcta.
- c. 0 y 2.
- d. 2 e + ∞.
- e. 2 y 3.

3.

La sucesión

$$a_n = cos(n\pi)$$

es:

Seleccione una:

- a. Convergente.
- b. Monótona decreciente.
- c. Monótona creciente.
- d. Ninguna de las otras es correcta.
- e. Acotada.

4.

Dada la sucesión

$$a_1 = \sqrt{3},\ a_2 = \sqrt{3\sqrt{3}},\ a_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}},$$

calcule el n-ésimo término a_n:

Seleccione una:

- a. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4^n-1}{2^n}}$
- b. $3^{\frac{1-2^n}{2^n}}$
- c. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2n-1}{2^n}}$
- d. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- e. $3^{\frac{2^n-1}{2^n}}$
- f. $3^{\frac{2n+1}{2^n}}$

5.

Dada la sucesión

$$a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$$

determine si converge o diverge, si converge, calcule el valor al que lo hace.

Seleccione una:

- a. ∞
- b. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- c. Diverge.
- d. $\frac{\pi}{2}$
- e. $\frac{1}{2}$
- f. 0

6.

Dada la sucesión

$$a_n = \left(n^2 + n\right)^{\frac{1}{n}}$$

determine si diverge o converge. Si converge, calcule su valor y de su respuesta aproximada a la **centésima** más cercana, de lo contrario digite el número: 9999.

Respuesta: