4.7 Cónicas en coordenadas polares

OBJETIVOS

- Dibujar gráficas de las secciones cónicas que tienen el foco en el polo.
- Encontrar la ecuación de una cónica en coordenadas polares que satisface ciertas condiciones.
- Resolver problemas sobre órbitas de cometas que se pueden describir con una sección cónica.

La ecuación en coordenadas polares de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \quad \text{o bien} \quad r = \frac{ed}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$$

tiene como gráfica una sección cónica, con uno de sus focos en el polo. d es la distancia del polo a la directriz.

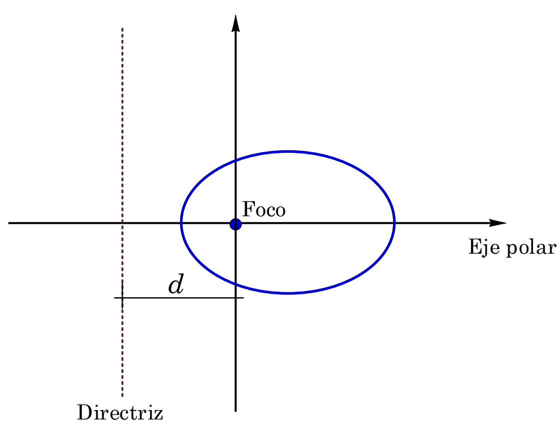
La ecuación de la directriz es $x = \pm d$ cuando la ecuación tiene la función seno, el eje de la cónica es el eje polar. Cuando la ecuación tiene la función coseno la ecuación de la directriz es $y = \pm d$ y el eje de la cónica es el eje $\frac{\pi}{2}$. El signo de la ecuación de la directriz es igual al signo que se antepone a la función trigonométrica.

Si $e = 1$ es una parábola.

Si $e < 1$ es una elipse.

Si $e > 1$ es una hipérbola.

La siguiente figura muestra la gráfica de una elipse



Ejemplo 1: Gráfica de una parábola

Identifique la cónica, encuentre sus elementos principales y dibuje su gráfica

$$r = \frac{3}{1 - \cos\theta}$$

Solución

La ecuación tiene la forma

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$$

La excentricidad es $e = 1$, por lo que la ecuación corresponde a una parábola que tiene su eje en el eje polar.

Del numerador se obtiene que

$$ed = 3$$

$$d = \frac{3}{e} = \frac{3}{1} = 3$$

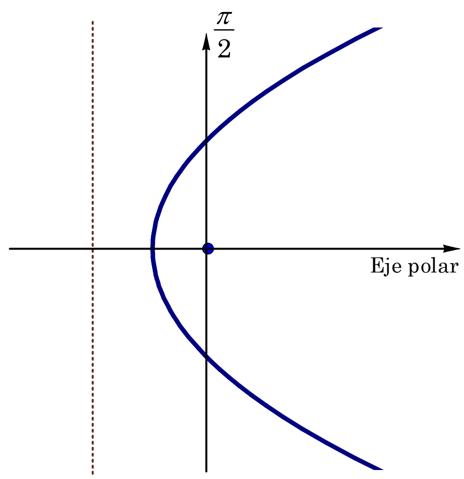
Como el signo de la función trigonométrica es negativo la directriz es la recta

$$x = -3$$

Para dibujar la gráfica se construye una pequeña tabla de valores, como se hizo en las gráficas de las otras curvas polares

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	$\nexists$	3	3/2	3

La figura muestra la gráfica de la parábola y su directriz.



Ejemplo 2: Gráfica de una elipse vertical

Identifique la cónica, encuentre sus elementos principales y dibuje su gráfica

$$r = \frac{10}{5 + 4\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Solución

Observe que la ecuación no tiene la forma

$$r = \frac{ed}{1 - e\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Razón por la cual es necesario hacer algo de algebra para obtener la forma correcta. Factorizando el 5 en el denominador y reordenando se tiene

$$r = \frac{10}{5 + 4\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{10}{5\left(1 + \frac{4}{5}\mathrm{sen}\,\theta\right)} = \frac{2}{1 + \frac{4}{5}\mathrm{sen}\,\theta}$$

De donde se tiene que

$$e = \frac{4}{5} < 1 \text{, la ecuación es de una elipse}$$

Del numerador se obtiene que

$$ed = 2$$

$$d = \frac{2}{e} = \frac{2}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{2}$$

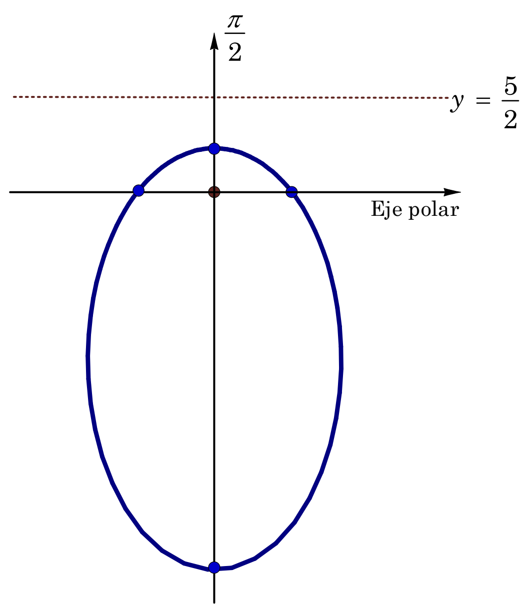
Como la función de la cónica es seno, la elipse es vertical. Como el signo que antecede a la función trigonométrica es positivo la directriz es positiva y su ecuación es

$$y = \frac{5}{2}$$

Para dibujar la gráfica se construye una pequeña tabla de valores, como se hizo en las gráficas de las otras curvas polares

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	2	10/9	2	10

La figura muestra la gráfica de la elipse y su directriz.



Ejemplo 3: Gráfica de una hipérbola horizontal

Identifique la cónica, encuentre sus elementos principales y dibuje su gráfica

$$r = \frac{8}{3 - 6\cos\theta}$$

Solución

Observe que la ecuación no tiene la forma

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$$

Razón por la cual es necesario hacer algo de algebra para obtener la forma correcta. Factorizando el 3 en el denominador y reordenando se tiene

$$r = \frac{8}{3 - 6\cos\theta} = \frac{8}{3(1 - 2\cos\theta)} = \frac{8/3}{1 - 2\cos\theta}$$

De donde se tiene que

$$e = 2 > 1 \text{, la ecuación es de una hiperbola}$$

Del numerador se obtiene que

$$ed = \frac{8}{3}$$

$$d = \frac{8/3}{e} = \frac{8/3}{2} = \frac{4}{3}$$

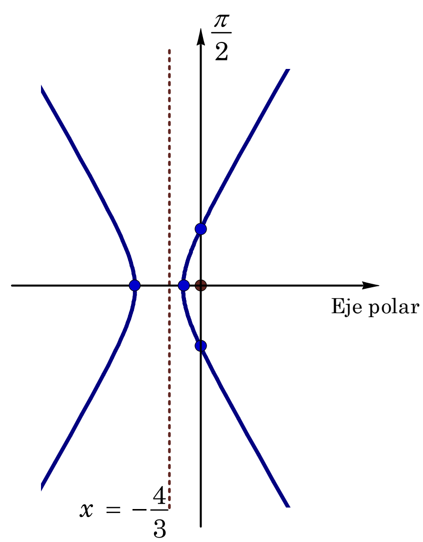
Como la función de la cónica es coseno, la hipérbola es horizontal. Como el signo que antecede a la función trigonométrica es negativo la directriz es negativa y su ecuación es

$$x = -\frac{4}{3}$$

Para dibujar la gráfica se construye una pequeña tabla de valores, como se hizo en las gráficas de las otras curvas polares

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	-8/3	8/3	8/9	8/3

La figura muestra la gráfica de la hipérbola y su directriz.



Ejemplo 4: Encontrar la ecuación dadas ciertas condiciones

Encuentre la ecuación en coordenadas polares de la cónica que tiene excentricidad 2 y su directriz es la recta $y = 6$

Solución

Como la excentricidad es $e = 2 > 1$, la ecuación corresponde a una hipérbola. Como la directriz es la recta horizontal $y = 6$, la hipérbola es vertical, es decir la función a utilizar es

$$r = \frac{ed}{1 + e\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

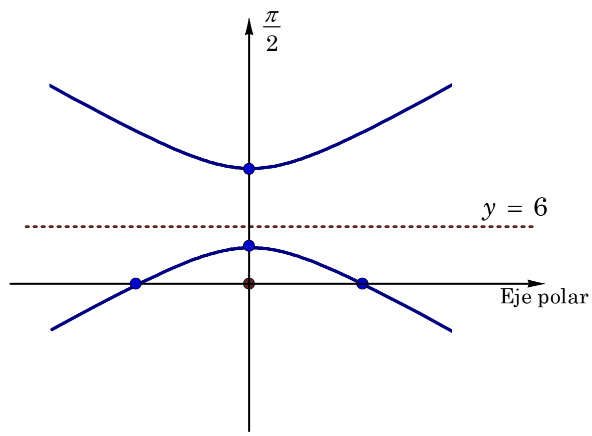
El signo en la ecuación es positivo ya que la directriz tiene ecuación positiva. Como $e = 2$ y $d = 6$, la ecuación de la hipérbola es

$$\begin{aligned} r &= \frac{(2)(6)}{1 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta} \\ &= \frac{12}{1 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta} \end{aligned}$$

Construyendo la tabla de valores para dibujar la gráfica

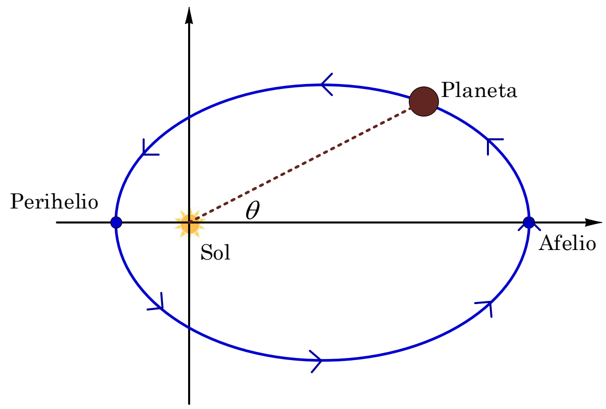
θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	12	4	12	-12

La siguiente figura muestra la gráfica de la hipérbola



Aplicaciones

Las ecuaciones de las secciones cónicas en coordenadas polares se utilizan para modelar las órbitas de los planetas, satélites y cometas; con el Sol en el foco. Se le llama Afelio al punto de la órbita donde el planeta está mas alejado del sol y se le llama perihelio al punto de la órbita en donde el planeta está mas cerca del sol.



Ejemplo 5: Orbita de planetas

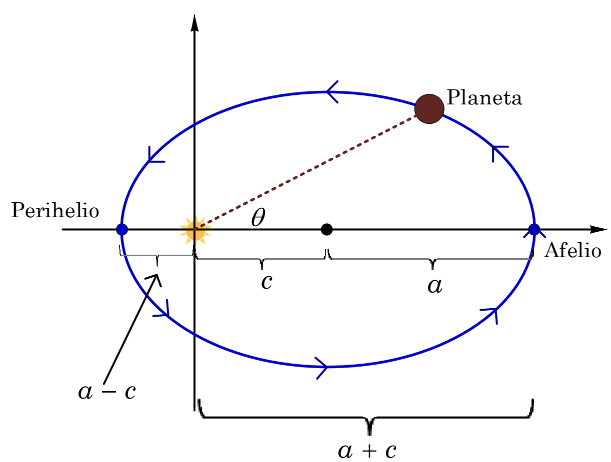
La excentricidad de la órbita del cometa Halley es $e = 0.97$ y la longitud del eje mayor de su órbita es $2a = 3.34 \times 10^9$ millas. Encuentre una ecuación para la órbita del cometa. Calcule la distancia más grande y la distancia más pequeña del cometa al sol.

Solución

La ecuación se escoge de tal forma que la elipse sea horizontal y que su directriz sea negativa, así la ecuación es

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$$

Ya conocemos la excentricidad. Para encontrar d será necesario encontrar un punto en la órbita del cometa



Como nos dan la longitud del eje mayor, podemos calcular el valor de a

$$2a = 3.34 \times 10^9$$

$$a = \frac{3.34 \times 10^9}{2} = 1.67 \times 10^9$$

Como nos dan la excentricidad, podemos calcular c

$$e = \frac{c}{a}$$

$$c = ea = (0.97)(1.67 \times 10^9)$$

$$c = 1.62 \times 10^9$$

De la gráfica observamos que cuando $\theta = 0$

$$r = a + c = 1.67 \times 10^9 + 1.62 \times 10^9$$

$$r = 3.29 \times 10^9$$

Ahora podemos sustituir el punto en la ecuación y despejar el valor de d

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} = \frac{ed}{1 - e\cos(0)} = \frac{ed}{1 - e}$$

Despejando d

$$r(1 - e) = ed$$

$$d = \frac{r(1 - e)}{e} = \frac{3.29 \times 10^9(1 - 0.97)}{0.97}$$

$$d = 1.02 \times 10^8$$

Por lo que la ecuación de la trayectoria del cometa es

$$r = \frac{(0.97)(1.02 \times 10^8)}{1 - 0.97\cos\theta}$$

$$r = \frac{9.89 \times 10^7}{1 - 0.97\cos\theta}$$

La distancia mas grande del cometa al sol es

$$a + c = 3.29 \times 10^9$$

La distancia más pequeña es

$$a - c = 1.67 \times 10^9 - 1.62 \times 10^9 = 5.0 \times 10^7$$

Ejercicios sobre cónicas en coordenadas polares

1.

Encuentre la ecuación en coordenadas polares de la cónica que tiene como directriz la recta $y = -8$ y que pasa por el punto $(4, \pi)$.

2.

Una cónica en coordenadas polares, tiene por ecuación:

$$r = \frac{15}{1 - 3\ cos\ \theta}$$

Uno de los focos se encuentra en el origen.

De las siguientes opciones que se le muestran, determine uno de los vértices, en coordenadas cartesianas, de la cónica dada.

Seleccione una:

- a. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- b. (-15.00,0)
- c. (-3.75,0)
- d. (3.75,0)
- e. (7.50,0)

3.

Encuentre la ecuación en coordenadas polares de la cónica que tiene como directriz la recta $y = 3$ y que pasa por el punto $(3, \pi)$.

Seleccione una:

- a. $r = \frac{4}{1+\sin\theta}$
- b. $r = \frac{3}{1+\sin\theta}$
- c. $r = \frac{3}{1-\cos\theta}$
- d. Ninguna de las otras es correcta.
- e. $r = \frac{3}{1+\cos\theta}$

4.

Encuentre la ecuación en coordenadas polares de una cónica que posee el afelio y el perihelio en los puntos (9, $\frac{\pi}{2}$), ($\frac{9}{7}$, $\frac{3\pi}{2}$), respectivamente y una excentricidad entre 0 y 1.

Seleccione una:

- a. $r = \frac{6}{4-3\cos\theta}$
- b. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- c. $r = \frac{6}{4-3sen\theta}$
- d. $r = \frac{9}{4+3sen\theta}$
- e. $r = \frac{9}{4-3sen\theta}$

5.

Una cónica en coordenadas polares, tiene por ecuación:

$$r = \frac{5}{4 + cos\,\theta}$$

La directriz de esta cónica, en coordenadas cartesianas, es:

Seleccione una:

- a. $y = 5$
- b. $x = -5$
- c. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- d. $x = 5$
- e. $y = -5$

6.

El planeta Mercurio viaja en una órbita elíptica con excentricidad 0.29. Su distancia mínima al Sol es $1.49x10^8$ km. Determine su distancia máxima al Sol.

Seleccione una:

- a. La distancia máxima al Sol es: 331577465 km.
- b. La distancia máxima al Sol es: 270718310 km.
- c. Ninguna respuesta es correcta.
- d. La distancia máxima al Sol es: 27071831.0 km.
- e. La distancia máxima al Sol es: 82007752 km.

7.

Un satélite se mueve describiendo una trayectoria elíptica con una excentricidad de $e = \frac{1}{3}$, teniendo como un foco al centro de la Tierra.

La menor distancia del satélite a la superficie de la Tierra es de 312 millas. Determine la mayor distancia que puede separarse el satélite de la Tierra (distancia medida en millas desde la superficie terrestre). Suponga que la Tierra es una esfera perfecta y que su radio es de 4,000 millas.

Indique su respuesta sin decimales.