

4.5 Área en coordenadas polares

OBJETIVOS

- Encontrar el área de una región limitada por una, dos o más curvas cuyas ecuaciones están expresadas por medio de coordenadas polares

El área de una región en coordenadas polares puede interpretarse como la suma de pequeñas áreas cada una de ellas con forma de sector circular, es decir

$$A = \int_a^b dA$$

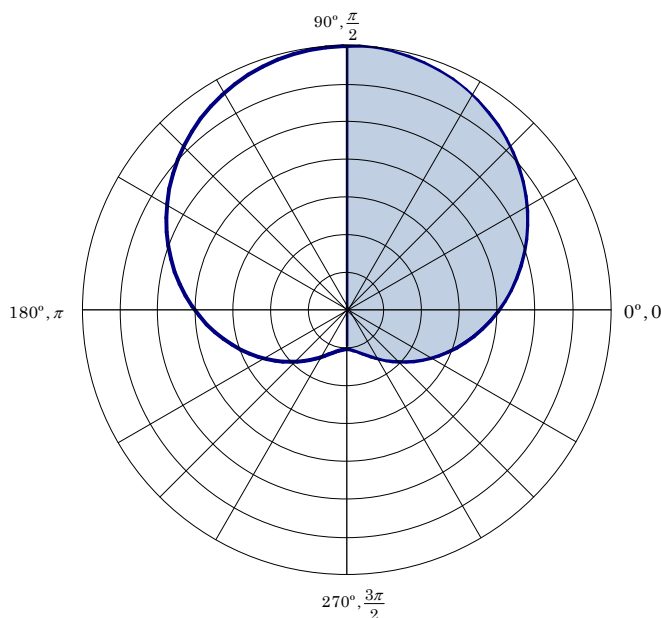
como el área de un sector circular es $A = \frac{1}{2}r^2\theta$. Si ésta fórmula se aplica para un pequeño ángulo $d\theta$, se obtiene que $dA = \frac{1}{2}r^2d\theta$. Por lo que la fórmula para el área de una región en coordenadas polares es

$$A = \int_a^b \frac{1}{2}r^2d\theta = \int_a^b \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta$$

donde $r = f(\theta)$.

Ejemplo 1: Área dentro de una curva

Halle el área de la región limitada por la curva $r = 4 + 3\sin\theta$ la cual se muestra sombreada en la figura



Solución

Al observar la figura se notamos que la región sombreada se obtiene barriendo un ángulo entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

Para comprobar esta observación podemos evaluar la función en $\theta = \pi/2$ y en $\theta = -\pi/2$

$$r(\pi/2) = 4 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 + 3(1) = 7$$

$$r(-\pi/2) = 4 + 3\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4 + 3(-1) = 1$$

que corresponden a los valores de r observados en la figura. Por lo que la región sombreada está dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (4 + 3\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (16 + 24\operatorname{sen}\theta + 9\sin^2\theta) d\theta \end{aligned}$$

Ahora hay que calcular la antiderivada, los dos primeros términos se calculan fácilmente y para el tercero se utiliza la identidad $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$.

$$\begin{aligned} \int (16 + 24\operatorname{sen}\theta + 9\sin^2\theta) d\theta &= \int \left[16 + 24\operatorname{sen}\theta + \frac{9}{2}(1 - \cos 2\theta) \right] d\theta \\ &= \int \left(\frac{41}{2} + 24\operatorname{sen}\theta - \frac{9}{2}\cos 2\theta \right) d\theta \\ &= \int \left[16 + 24\operatorname{sen}\theta + \frac{9}{2}(1 - \cos 2\theta) \right] d\theta \\ &= \frac{41}{2}\theta - 24\cos\theta - \frac{9}{4}\sin 2\theta \end{aligned}$$

Ahora se puede evaluar para obtener el área

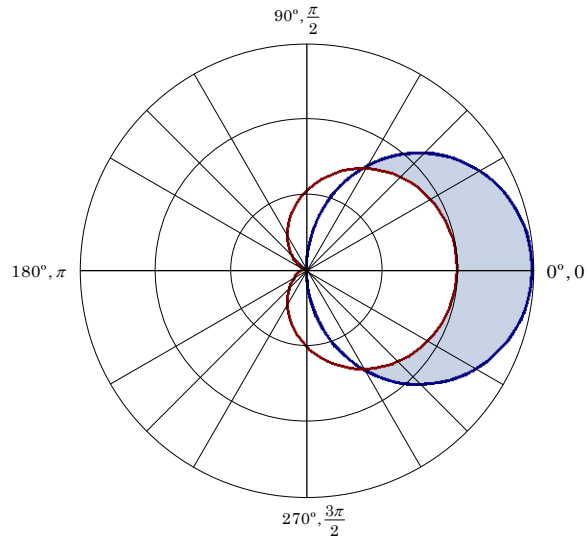
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left[\frac{41}{2}\theta - 24\cos\theta - \frac{9}{4}\sin 2\theta \right]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} \\ &= \left[\frac{41}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 12\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{9}{8}\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - \left[\frac{41}{4}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 12\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{9}{8}\sin 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= \left[\frac{41}{8}\pi - 0 - 0 \right] - \left[-\frac{41}{8}\pi - 0 - 0 \right] \\ &= \frac{41}{8}\pi + \frac{41}{8}\pi \\ &= \frac{41}{4}\pi = 32.201 \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Área dentro de una curva y fuera de otra

Calcule el área de la región que está dentro de la curva $r = 3\cos\theta$ y por afuera de $r = 1 + \cos\theta$.

Solución

Para resolver éste problema se comienza dibujando en un mismo sistema las gráficas de las dos curvas. la primera es un círculo de diámetro 3, con centro sobre el eje x y la segunda es un cardioide. La figura siguiente muestra ambas curvas así como la región cuya área se quiere calcular.



Ahora que ya se ha visualizado la región se deben calcular los puntos de intersección de las curvas, para ello igualamos las ecuaciones y resolvemos la ecuación trigonométrica resultante.

$$3\cos\theta = 1 + \cos\theta$$

$$2\cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}(1/2) = \frac{1}{3}\pi$$

como el coseno es positivo en el primero y cuarto cuadrante se tiene que las soluciones de ésta ecuación son $-\frac{1}{3}\pi$ y $\frac{1}{3}\pi$. Aunque también se puede utilizar el hecho de que la región es simétrica.

$$\begin{aligned} A &= A_1 - A_2 = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} dA - \int_{-\pi/3}^{\pi/3} dA_2 = 2 \left[\int_0^{\pi/3} dA_1 - \int_0^{\pi/3} dA_2 \right] \\ &= 2 \left[\int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} (3\cos\theta)^2 d\theta - \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2} (1 + \cos\theta)^2 d\theta \right] \\ &= 9 \int_0^{\pi/3} \cos^2\theta d\theta - \int_0^{\pi/3} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta \\ &= 8 \int_0^{\pi/3} \cos^2\theta d\theta - \int_0^{\pi/3} d\theta - 2 \int_0^{\pi/3} \cos\theta d\theta \\ &= \frac{8}{2} \int_0^{\pi/3} (1 + \cos 2\theta) d\theta - \int_0^{\pi/3} d\theta - 2 \int_0^{\pi/3} \cos\theta d\theta \\ &= 4 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/3} - [\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/3} - 2[\sin\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi/3} \\ &= \pi \end{aligned}$$

de donde el área entre las dos curvas tiene valor de π

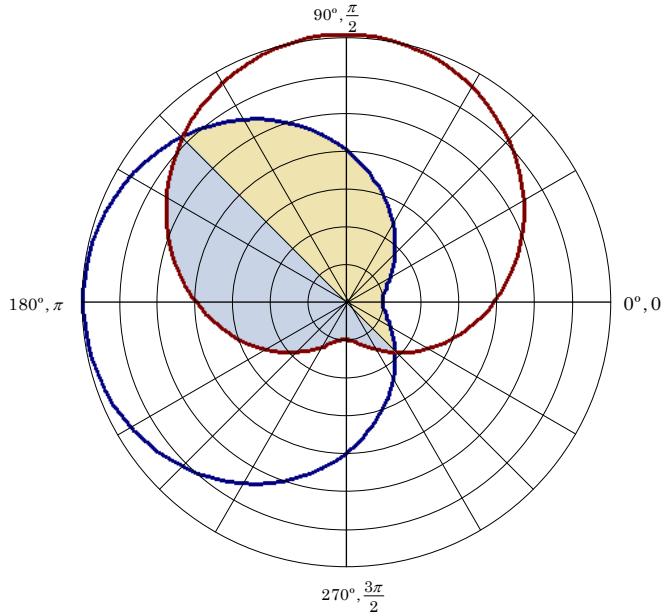
Ejemplo 3: Área dentro de dos curvas

Plantee las integrales para calcular el área que se encuentra en el interior de las dos curvas

$$r = 4 - 3\cos\theta, \quad r = 4 + 3\sin\theta,$$

Solución

Al utilizar un programa de cómputo para dibujar la curva se obtiene la siguiente gráfica, en donde se muestra en color celeste el área entre las dos curvas



Para encontrar los puntos de intersección igualamos las ecuaciones y despejamos el ángulo

$$4 - 3\cos\theta = 4 + 3\sin\theta$$

$$-3\cos\theta = 3\sin\theta$$

$$\frac{-3}{3} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = -1$$

La función tangente es negativa en el segundo y cuarto cuadrante, al despejar θ se obtiene

$$\theta = -\frac{\pi}{4} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Como la región interior a ambas curvas es simétrica, el cálculo del área se puede simplificar. En este ejemplo se calculará el área asumiendo que no hay simetría.

$$A = A_1 + A_2$$

$$= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{2} (4 - 3\cos\theta)^2 d\theta + \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} \frac{1}{2} (4 + 3\sin\theta)^2 d\theta$$

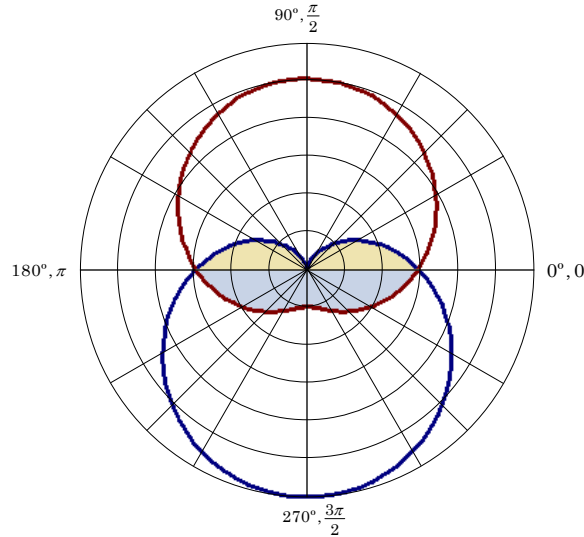
Ejemplo 4: Área dentro de dos curvas

Plantee las integrales para calcular el área que se encuentra en el interior de las dos curvas

$$r = 3 - 3\operatorname{sen}\theta, \quad r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta,$$

Solución

En la figura se muestra la gráfica de las dos curvas, en color rojo la curva $r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$ y en color azul la curva $r = 3 - 3\operatorname{sen}\theta$.



Los puntos ángulos en donde se intersecan las curvas se obtienen directamente de la figura, por lo que no será necesario resolver la ecuación. Por otro lado, el área de intersección no es simétrica, razón por la cual hay que dividir el problema en dos integrales, una para la que se muestra en color amarillo y otra para la que se muestra en color celeste

$$A = A_1 + A_2$$

El área 1 se obtiene integrando la curva $r = 3 - 3\operatorname{sen}\theta$ en donde $0 \leq \theta \leq \pi$

$$A_1 = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 d\theta + \int_0^\pi \frac{1}{2} (3 - 3\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta$$

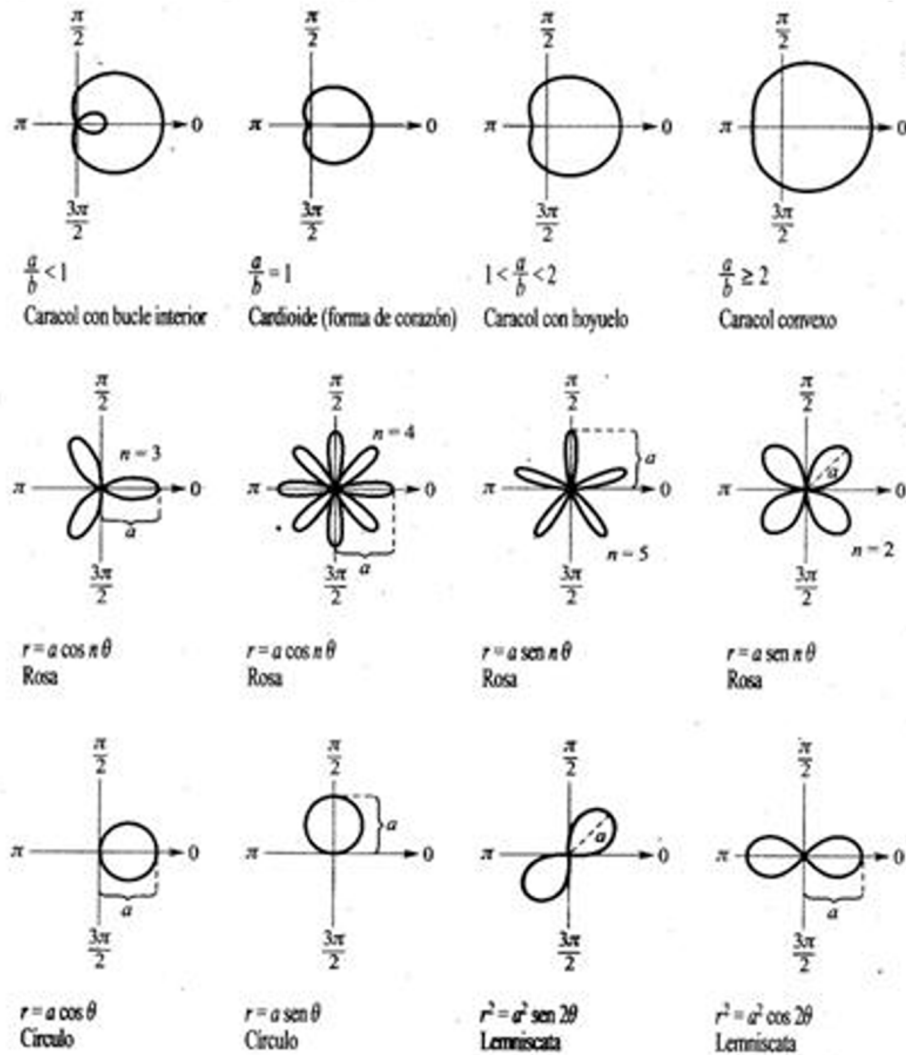
El área 2 se obtiene integrando la curva $r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$ en donde $\pi \leq \theta \leq 2\pi$

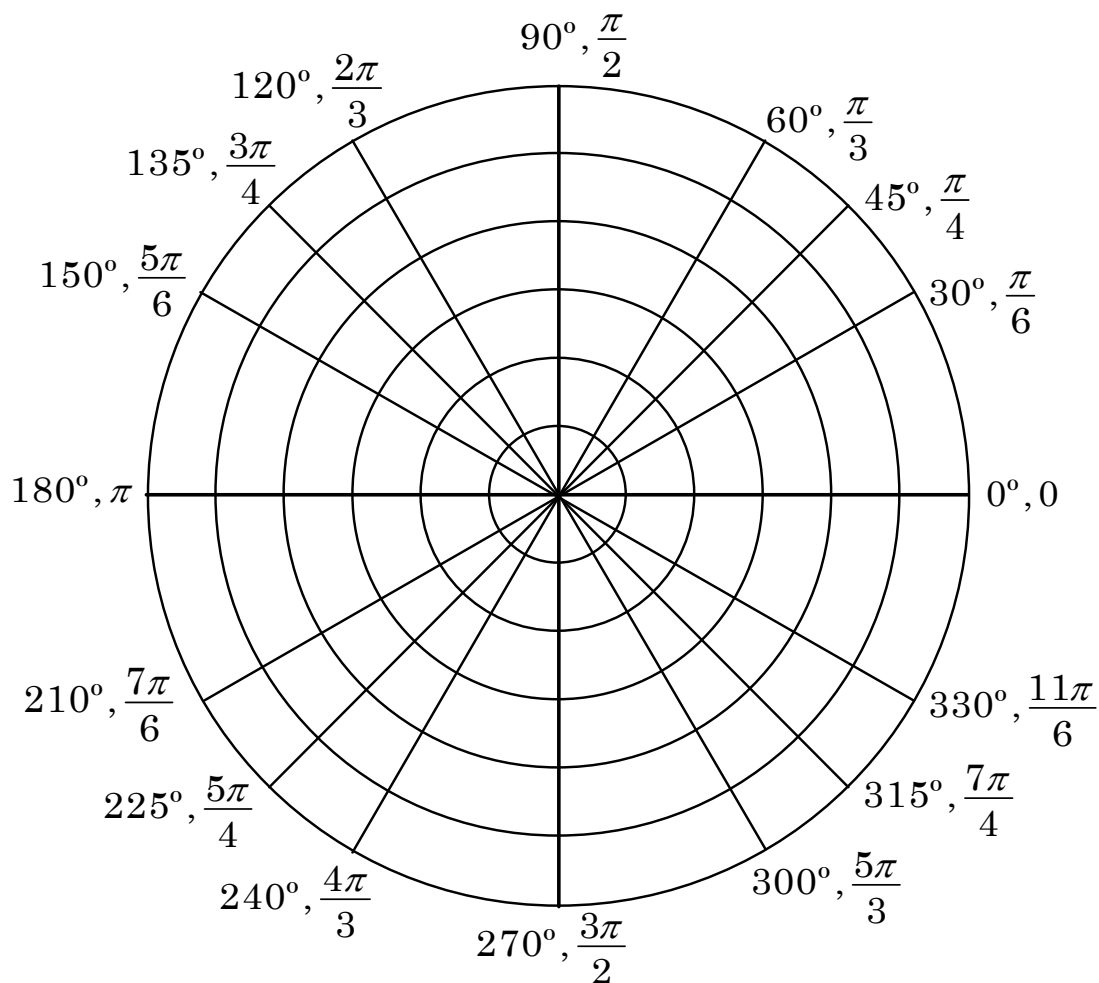
$$A_1 = \int_a^b \frac{1}{2} r^2 d\theta + \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{2} (3 + 2\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta$$

Sumando las integrales para obtener el área total

$$A = \int_0^\pi \frac{1}{2} (3 - 3\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta + \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{2} (3 + 2\operatorname{sen}\theta)^2 d\theta$$

Resumen de gráficas



Papel polar**Ejercicios**

1.

Si el área de la región encerrada por uno de los lazos de la curva $r^2 = a \cos 2\theta$ es 5, calcule el valor de "a".

Respuesta:

2.

Al calcular el área del rizo interior de la curva

$$r = 5 + 10\cos \theta$$

se obtiene:

Respuesta:

3.

El valor del área dentro de $r = 10\sin 2\theta$ pero fuera de $r = 5$ es:

Respuesta:

4.

Encuentre el área dentro de la curva $r = -9\sin \theta$ pero fuera de la curva $r = 3 + 3\sin \theta$

Respuesta:

5.

Calcule el área de interior a las curvas

$$r_1 = 2\cos 3\theta, r_2 = 2\sin 3\theta$$

Respuesta:

Dadas las ecuaciones polares: $r_1 = 1 + \cos \theta$ y $r_2 = \frac{1}{1 + \cos \theta}$

Plantee la o las integrales que calculen el área en común entre estas dos curvas:

Seleccione una:

- ☐ a. $A = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1 + \cos \theta}\right)^2 d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta$
- ☐ b. $A = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1 + \cos \theta}\right)^2 d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta$
- ☐ c. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- ☐ d. $A = 2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1 + \cos \theta}\right)^2 d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta$
- ☐ e. $A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{1 + \cos \theta}\right)^2 d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta$
- ☐ f. $A = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{1 + \cos \theta}\right)^2 d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta$