4.4 Gráficas en coordenadas polares

OBJETIVOS

- Dibujar gráficas de ecuaciones expresadas en coordenadas polares.

En esta sección se estudia la representación gráfica de ecuaciones expresadas en coordenadas polares. Al igual que en coordenadas rectangulares la forma básica para dibujar una gráfica consiste en construir una tabla de valores y a partir de ella hacer un bosquejo de la gráfica. Como ya se sabe este procedimiento funciona en muchos casos, pero los resultados obtenidos usualmente no son los esperados, sobre todo si la ecuación a dibujar es algo compleja.

Ejemplo 1: Gráfica con table de valores

Utilice una tabla de valores para dibujar la gráfica de la ecuación

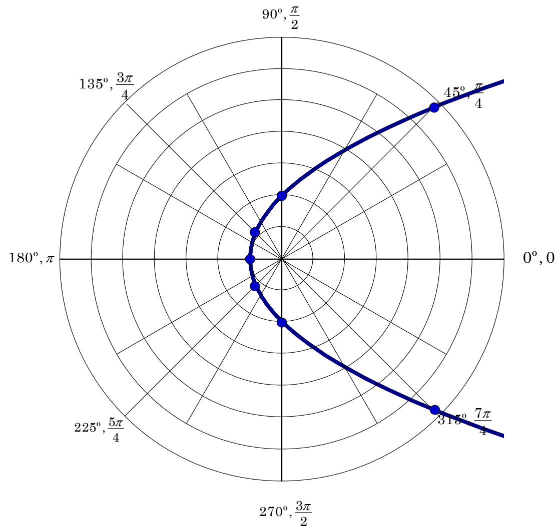
$$r = \frac{4}{2 - 2\cos\theta}$$

Solución

Para dibujar la gráfica se ha construido la siguiente tabla de valores

θ	r
0	$\nexists$
$\pi/4$	6.82
$\pi/2$	2
$3\pi/4$	1.17
π	1
$5\pi/4$	1.17
$3\pi/2$	2
$7\pi/4$	6.82
2π	$\nexists$

Al dibujar los puntos en un sistema de coordenadas polares y dibujar la gráfica se obtiene la figura mostrada en la página siguiente



En el resto de esta sección se estudian las gráficas de las ecuaciones mas utilizadas en coordenadas polares

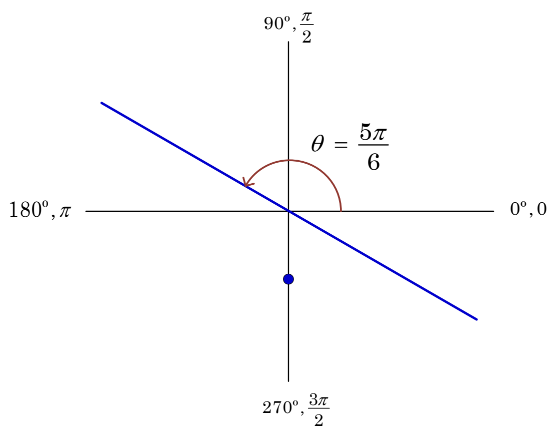
Rectas que pasan por el polo

La ecuación de cualquier recta que pase por el polo tiene como ecuación

$$\theta = c$$

En donde c es la medida del ángulo que la recta forma con el eje polar. En el siguiente ejemplo se dibuja la gráfica de la recta

$$\theta = \frac{5\pi}{6}$$

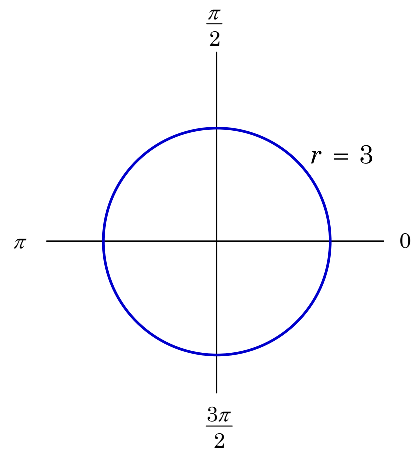


Círculos con centro en el polo

La ecuación de un círculo que tiene centro en el polo y radio r es

$$r = c$$

Por ejemplo, la gráfica del círculo con ecuación $r = 3$ se muestra en la siguiente figura



Círculos que pasan por el polo

Las ecuaciones en forma polar de la forma

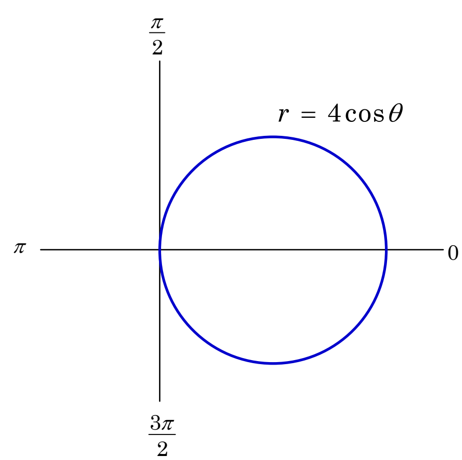
$$r = a\cos\theta \quad \text{y} \quad r = a\,\text{sen}\,\theta$$

Tienen como gráfica un círculo que pasa por el polo. Si la función trigonométrica es coseno, el eje principal es el eje polar y el círculo es tangente al eje $\frac{\pi}{2}$. Mientras que, si la función trigonométrica es seno, el eje principal es el eje $\frac{\pi}{2}$ y la gráfica es tangente al eje polar. Para dibujar estas gráficas se recomienda hacer una pequeña tabla de valores en donde se muestren los ángulos principales y luego utilizar la información proporcionada en esta sección para hacer el tras.

En el ejemplo siguiente se dibuja la gráfica de dos círculos

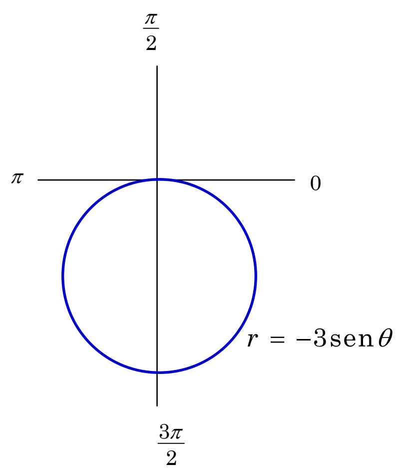
$$r = 4\cos\theta$$

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
r	4	0	-4	0	4



$$r = -3\operatorname{sen}\theta$$

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
r	0	-3	0	3	0



Limacones

Las ecuaciones polares de la forma

$$r = a \pm b\cos\theta \quad \text{y} \quad r = a \pm b\operatorname{sen}\theta$$

Donde $a > 0$ y $b > 0$, reciben el nombre de limacones. Dependiendo de la relación entre los valores entre a y b la gráfica presenta algunos cambios

Cardioide

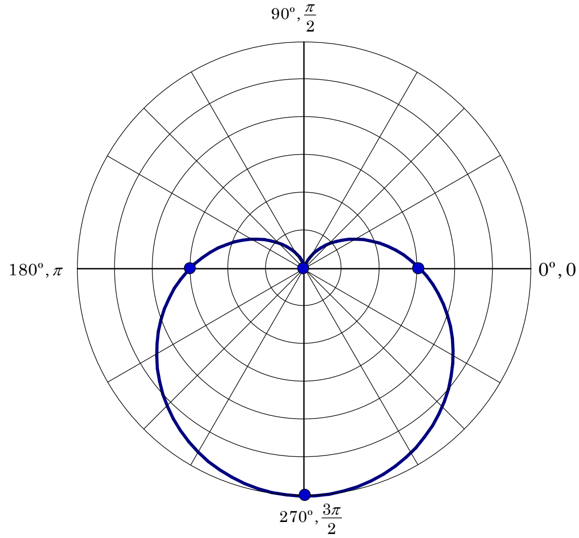
Si $a = b$ o $\frac{a}{b} = 1$ las gráficas reciben el nombre de cardioide, ya que su forma se aproxima a la de un corazón. El siguiente ejemplo muestra la gráfica de la ecuación

$$r = 3 - 3\operatorname{sen}\theta$$

Como la función es seno, su eje principal es la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$, Una pequeña tabla de valores será suficiente para obtener sus puntos más importantes

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	3	0	3	6

La gráfica es la siguiente



Limacón con lazo interior

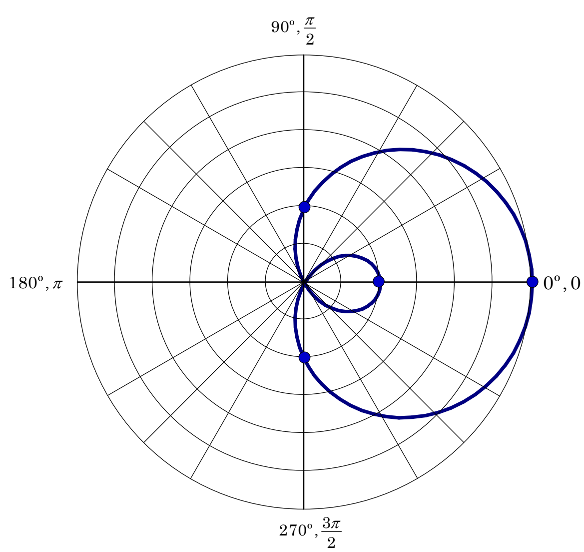
Si $a < b$ o $\dfrac{a}{b} < 1$ las gráficas reciben el nombre de limacon con lazo interior. El siguiente ejemplo muestra la gráfica de la ecuación

$$r = 2 + 4\cos\theta$$

Como la función es coseno, su eje principal es el eje polar. Una pequeña tabla de valores será suficiente para obtener sus puntos más importantes

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	6	2	-2	2

La gráfica es la siguiente



Para encontrar el ángulo en donde la gráfica pasa por el polo, será necesario resolver la ecuación

$$0 = 2 + 4\cos\theta$$

Obteniéndose

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Limacón con un orificio

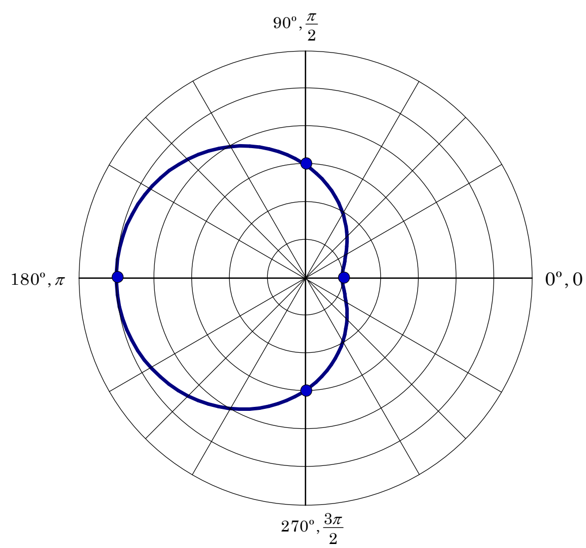
Si $1 < \frac{a}{b} < 2$ las gráficas reciben el nombre de limacón con un orificio. El siguiente ejemplo muestra la gráfica de la ecuación

$$r = 3 - 2\cos\theta$$

Como la función es coseno, su eje principal es el eje polar. Una pequeña tabla de valores será suficiente para obtener sus puntos más importantes

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	1	3	5	3

La gráfica es la siguiente



Limacón convexo

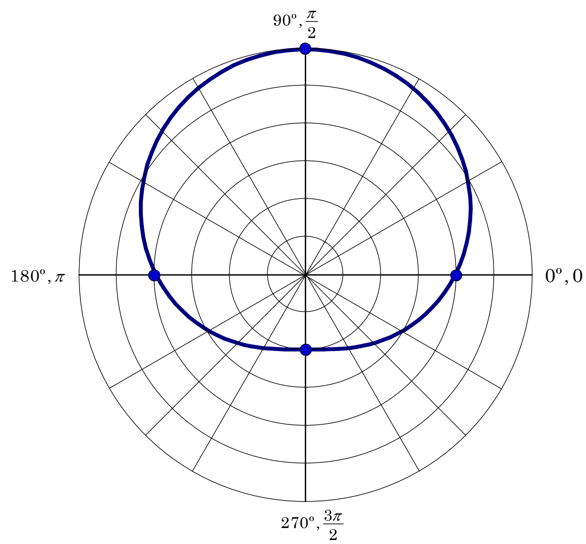
Si $\frac{a}{b} \geq 2$ las gráficas reciben el nombre de limacón convexo. El siguiente ejemplo muestra la gráfica de la ecuación

$$r = 4 + 2\operatorname{sen}\theta$$

Como la función es seno, su eje principal es el eje $\theta = \frac{\pi}{2}$. Una pequeña tabla de valores será suficiente para obtener sus puntos más importantes

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
r	4	6	4	2

La gráfica es la siguiente



Rosas

Las gráficas de las ecuaciones en coordenadas polares de la forma

$$r = a\cos(n\theta) \quad \text{y} \quad r = a\,\text{sen}(n\theta)$$

Reciben el nombre de rosas ya que tienen la forma de una flor. La rosa tiene n pétalos si n es impar y tiene $2n$ pétalos si n es par. El largo de los pétalos es iguala a.

Para dibujar la gráfica de una rosa no ayuda mucho una tabla de valores ya que proporciona muy poca información. Es mejor encontrar el ángulo en el cual se presenta la longitud máxima del primer pétalo y a partir de ahí dibujar uniformemente distribuidos el resto de pétalos.

Ejemplo 1: Rosa de 3 pétalos

Dibuje la gráfica de la rosa

$$r = 6\,\text{sen}(3\theta)$$

Solución

Como la longitud máxima de los pétalos es 6, debemos encontrar el primer ángulo para el cual $r = 6$. Para ello resolvemos la ecuación

$$6 = 6\,\text{sen}(3\theta)$$

$$\text{sen}(3\theta) = 1$$

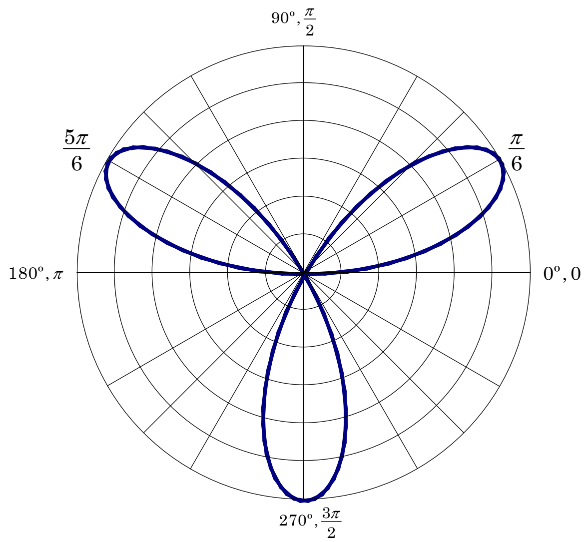
$$3\theta = \text{sen}^{-1}(1)$$

$$3\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Por lo que el primer pétalo estará en el ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$. Como son 3 pétalos distribuidos uniformemente en una circunferencia, el ángulo entre dos pétalos será $\frac{2\pi}{3}$

La siguiente figura muestra la gráfica de la rosa



Ejemplo 2: Rosa de 4 pétalos

Dibuje la gráfica de la rosa

$$r = 6\cos(2\theta)$$

Solución

Como la longitud máxima de los pétalos es 6, debemos encontrar el primer ángulo para el cual $r = 6$. Para ello resolvemos la ecuación

$$6 = 6\cos(2\theta)$$

$$\cos(2\theta) = 1$$

$$2\theta = \cos^{-1}(1) = 0$$

$$\theta = 0$$

Por lo que el primer pétalo estará en el ángulo $\theta = 0$. Como son 4 pétalos distribuidos uniformemente en una circunferencia, el ángulo entre dos pétalos será $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Algo que también es interesante en las polares es encontrar el primer ángulo para el cual la curva pasa por el polo, para ello igualamos a cero y se resuelve la ecuación resultante

$$r = 6\cos(2\theta) = 0$$

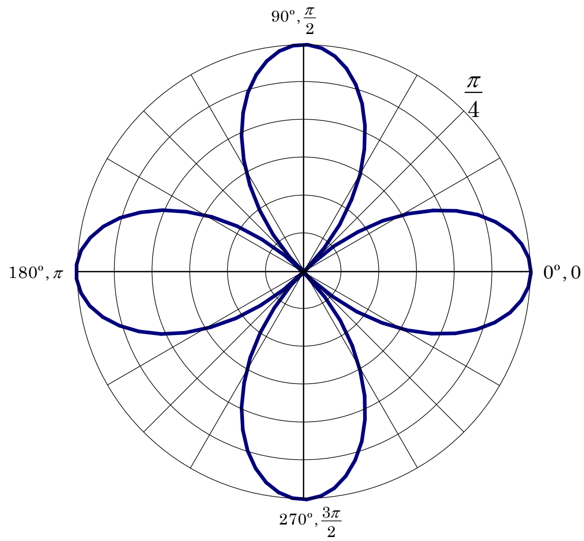
$$\cos(2\theta) = 0$$

$$\cos(2\theta) = 0$$

$$2\theta = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la rosa

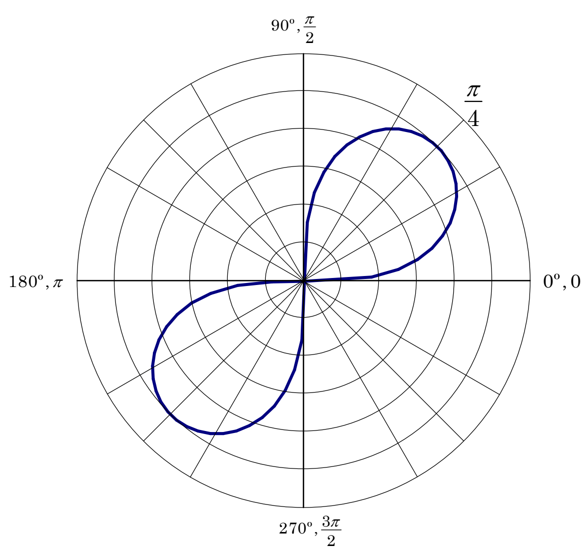


Lemniscata

La ecuación en coordenadas polares de la forma

$$r^2 = a\cos(2\theta) \text{ o } r^2 = a\,\text{sen}(2\theta)$$

Reciben en nombre de Lemniscata. Su gráfica es similar a la gráfica de una rosa con la diferencia que tiene solamente dos pétalos. Si la función es coseno los pétalos tienen su longitud máxima $\sqrt{a}$ en los ángulos 0 y π, mientras que si la función es seno, la longitud máxima se localiza en los ángulos $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$. La siguiente figura muestra la gráfica de la lemniscata $r^2 = 6\,\text{sen}(2\theta)$



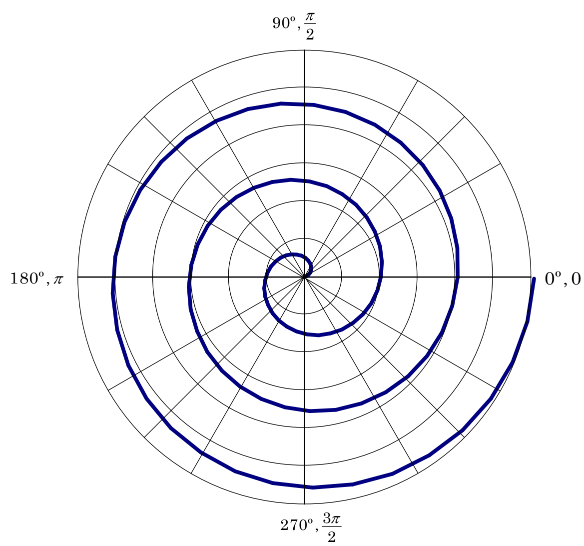
Espiral

La última curva que se estudia en esta sección se llama espiral y su ecuación tiene la forma

$$r = c\theta$$

Donde c es una constante que determina que tan rápido se abre la espiral. Si $c > 0$ la espiral se va abriendo en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, mientras que si $c < 0$ la espiral va abriendo en el sentido de las agujas del reloj.

La siguiente figura muestra la gráfica de la espiral $r = \frac{1}{3}\theta$



Ejercicios sobre gráficas en polares

1.

Dada la ecuación polar

$$r = 6cos\ 2\theta$$

a) La gráfica corresponde a ?

b) La ecuación polar se traza completamente en el intervalo $0 \le \theta \le \pi$

2.

Dada la ecuación polar de un caracol con lazo interno

$$r = 1 - 2sen\,\theta$$

a) El lazo interno se traza en el intervalo $\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{13\pi}{6}$

b) La gráfica de la ecuación pasa por el polo en $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

3.

Dada la ecuación polar

$$r^2 = 9sen\,2\theta$$

a) La gráfica corresponde a: ?

b) La gráfica de la ecuación es simétrica respecto al polo.

c) La gráfica de la ecuación pasa por el polo en los valores $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots$

4.

Dada la ecuación en coordenadas polares $r = 5cos2\theta$, cual de las siguientes afirmaciones es falsa:

Seleccione una:

- a. Se gráfica de $0 \leq \theta \leq 2\pi$ con r positivo
- b. La gráfica de la ecuación es simétrica respecto al eje polar.
- c. La gráfica de la ecuación es una rosa de 4 pétalos.
- d. La gráfica de la ecuación es simétrica respecto al polo.
- e. La gráfica de la ecuación pasa por el polo.

5.

Dada la ecuación en coordenadas polares $r^2 = -4sen2\theta$, cual de las siguientes afirmaciones es falsa:

Seleccione una:

- a. La gráfica de la ecuación pasa por el polo.
- b. La gráfica de la ecuación es una lemniscata
- c. La gráfica de la ecuación es simétrica respecto al polo.
- d. Se grafica la mitad de la curva de 0 a $\pi/2$
- e. Se grafica la mitad de la curva de $3\pi/2$ a 2π