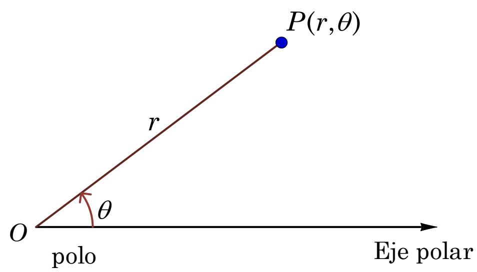
4.3 Coordenadas polares

OBJETIVOS

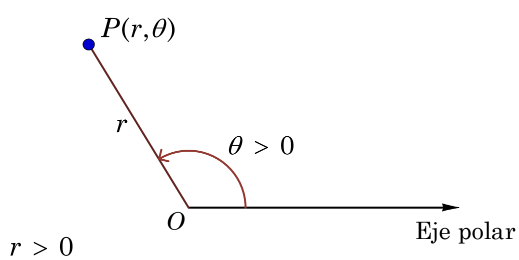
- Representar puntos en un sistema de coordenadas polares.
- Convertir puntos expresados en coordenadas rectangulares a coordenadas polares.
- Convertir puntos expresados en coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

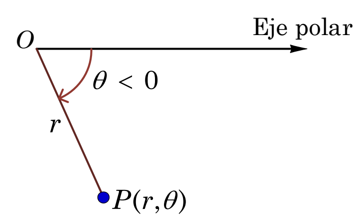
Coordenadas polares

En un sistema de coordenadas polares un punto en el plano se representa como $P(r,\theta)$ en donde r es la distancia medida desde el origen del sistema de coordenadas polares, llamado **polo**. θ es el ángulo medido en radianes con lado inicial en eje x positivo, llamado en este sistema **eje polar**.

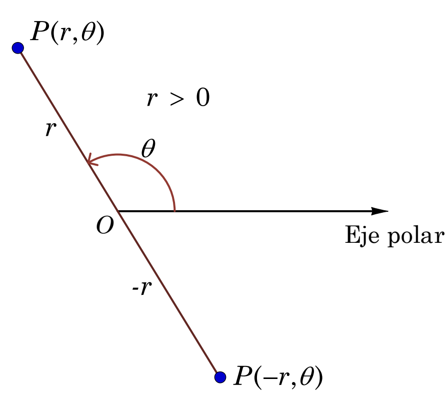


En este sistema un ángulo es positivo si se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj y es negativo si se mide en la misma dirección.





El radio r es positivo si se grafica en el segmento dirigido en la misma posición que el ángulo y es negativo si se grafica en un segmento dirigido en dirección opuesta al del radio positivo, es decir con un ángulo 180º mayor al ángulo θ



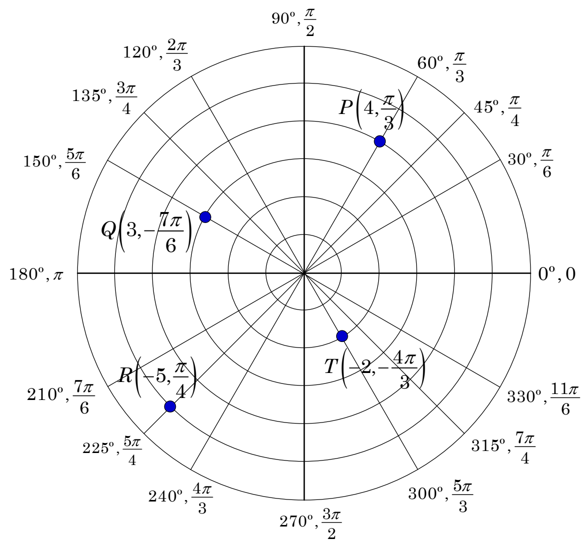
Ejemplo 1: Gráfica de puntos en polares

En un sistema de coordenadas polares, dibuje la representación gráfica de los siguientes puntos

$$P\left(4,\frac{\pi}{3}\right), \qquad Q\left(3,-\frac{7\pi}{6}\right), R\left(-5,\frac{\pi}{4}\right), \qquad T\left(-2,-\frac{4\pi}{3}\right)$$

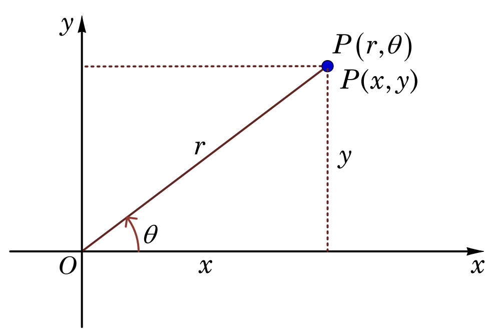
Solución

Para hacer gráficas en coordenadas polares, se recomienda utilizar un modelo de papel polar, como el que se utiliza pare este ejemplo. Este papel contiene una serie de círculos concéntricos y una escala angular con los ángulos comúnmente utilizados.



Relación entre polares y rectangulares

Para establecer la relación entre coordenadas rectangulares y coordenadas polares se sobreponen los dos sistemas y se establecen las relaciones correspondientes



Pasar de rectangulares a polares

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \text{ entonces } \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \text{ entonces } \quad x = r\cos\theta$$

Al pasar de coordenadas polares a rectangulares se obtiene una única representación del punto.

Pasar de polares a rectangulares

$$r^2 = x^2 + y^2 \ , \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

El problema al pasar de rectangulares a polares es que existen infinitas formas de representar el mismo punto en coordenadas polares, ya sea con r positivo o con r negativo. El ángulo puede ser positivo o negativo con infinidad de valores posibles.

Ejemplo 2: pasar de polares a rectangulares

Convierta los siguientes puntos expresados en coordenadas polares, a sus correspondientes coordenadas rectangulares

a. $Q\left(3, -\frac{7\pi}{6}\right)$, **b.** $Q\left(-2, -\frac{5\pi}{4}\right)$

Solución

a. En este punto $r = 3$ y $\theta = -\frac{7\pi}{6}$

$$x = r\cos\theta = 3\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 3\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

Las coordenadas rectangulares son $\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b. En este punto $r = -2$ y $\theta = -\frac{5\pi}{4}$

$$x = r\cos\theta = -2\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = -2\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

Las coordenadas rectangulares son $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

Ejemplo 3: Pasar de rectangulares a polares

a. Convierta a coordenadas polares el punto dado en rectangulares con $r > 0$ y $\theta > 0$

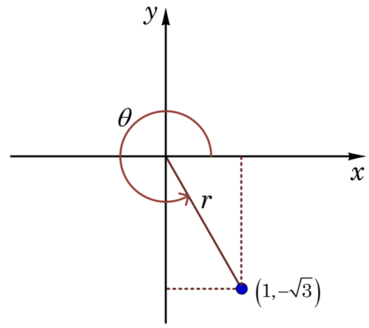
$$\left(1, -\sqrt{3}\right)$$

b. Convierta a coordenadas polares el punto dado en rectangulares con $r < 0$ y $\theta < 0$

$$(-3, -3)$$

Solución

a. Aquí se pide que el r sea positivo y el ángulo sea positivo, como se muestra en la figura.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

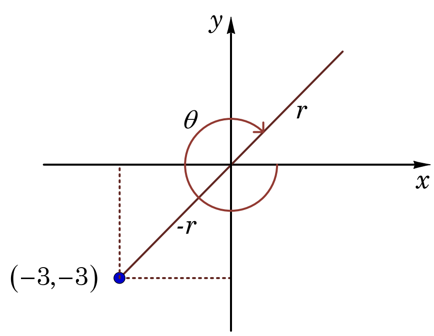
Como la tangente es negativa en el segundo y cuarto cuadrante. La respuesta dada por la calculadora está en el cuadrante correcto. Buscamos un ángulo que sea positivo y coterminal con la repuesta que da la calculadora, este lo obtenemos sumando 2π

$$\theta = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$$

Las coordenadas polares del punto son

$$(r,\theta) = \left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$$

b. Aquí se pide que r sea negativo y que el ángulo sea negativo



$$r = -\sqrt{x^2 + y^2} = -\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = -\sqrt{9+9} = -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{-3}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

Como la tangente es positiva en el primero y tercer cuadrante. El punto está en el tercer cuadrante, por lo que el ángulo negativo correcto, para un radio negativo.

$$\theta = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$$

Las coordenadas buscadas son

$$(r,\theta) = \left(-3\sqrt{2}, -\frac{7\pi}{4}\right)$$

Ejemplo 4: Pasar una ecuación de rectangulares a coordenadas polares

Encuentre una ecuación en coordenadas polares de la ecuación dada en coordenadas rectangulares

a. $x^2 + y^2 = 16x$ **b.** $3x - 8y + 4 = 0$

Solución

Las relaciones para convertir una ecuación a coordenadas polares son

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \text{ entonces } \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \text{ entonces } \quad x = r\cos\theta$$

a. Sustituyendo en la primera ecuación y simplificando

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16x \\ (r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2 &= 16r\cos\theta \\ r^2\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) &= 16r\cos\theta \\ r^2 &= 16r\cos\theta \\ r &= 16\cos\theta \end{aligned}$$

b. Procediendo de la misma forma para la ecuación de la recta

$$\begin{aligned} 3x - 8y + 4 &= 0 \\ 3r\cos\theta - 8r\operatorname{sen}\theta &= -4 \\ r(3\cos\theta - 8\operatorname{sen}\theta) &= -4 \\ r &= \frac{-4}{3\cos\theta - 8\operatorname{sen}\theta} \end{aligned}$$

Ejemplo 5: Pasar una ecuación de coordenadas polares a coordenadas rectangulares

Encuentre una ecuación en coordenadas rectangulares de la ecuación dada en coordenadas polares

a. $r^2\cos 2\theta = 16$ **b.** $r = 3 + 3\sec\theta$

Solución

Las ecuaciones para convertir una ecuación de polares a rectangulares son

$$r^2 = x^2 + y^2\ , \quad \tan\theta = \frac{y}{x}\ , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad y = r\operatorname{sen}\theta, \quad x = r\cos\theta$$

a. Realizando las sustituciones adecuadas se tiene

$$r^2 \cos 2\theta = 16$$

$$r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) = 16$$

$$r^2\left(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}\right) = 16$$

$$r^2\left(\frac{x^2 - y^2}{r^2}\right) = 16$$

$$x^2 - y^2 = 16$$

Que es la ecuación de una hipérbola horizontal con centro en el origen.

b. Usando la identidad para la secante se tiene

$$r = 3 + 3\sec\theta$$

$$r = 3 + 3\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$r = \frac{3\cos\theta + 3}{\cos\theta}$$

Sustituyendo $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$$r = \frac{3\left(\frac{x}{r}\right) + 3}{\left(\frac{x}{r}\right)} = \frac{\frac{3x + 3r}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{3x + 3r}{x}$$

Ahora pasamos a multiplicar x al otro lado de la ecuación

$$rx = 3x + 3r$$

$$rx - 3r = 3x$$

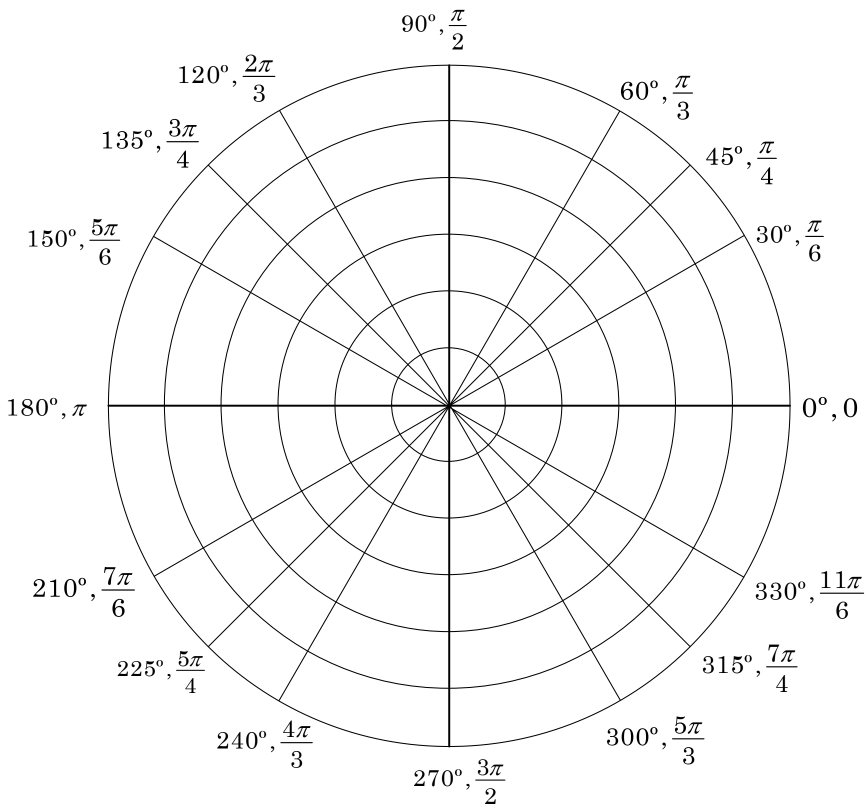
$$r(x - 3) = 3x$$

Sustituyendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\sqrt{x^2 + y^2}\,(x - 3) = 3x$$

$$\left(x^2 + y^2\right)(x - 3)^2 = 9x^2$$

Papel polar



Ejercicios del portal

1.

Dado el punto $(6, 4)$ en coordenadas rectangulares, determine θ si las coordenadas polares (r, θ) cumplen con las siguientes condiciones: $\theta < 0$ y $r < 0$.

(Nota: escriba la respuesta con dos decimales.)

2.

Dado el punto $(-8, -1)$ en coordenadas rectangulares, determine θ si las coordenadas polares (r, θ) cumplen con las siguientes condiciones: $\theta > 0$ y $r > 0$.

(Nota: escriba la respuesta con dos decimales.)