4.2 Longitud de arco y superficie de revolución en curvas definidas por ecuaciones paramétricas

Para calcular la longitud de una curva y el área de una superficie de revolución en una curva definida por medio de sus ecuaciones paramétricas se utilizan las mismas expresiones que en coordenadas polares, es decir

$$s = \int_a^b ds, \qquad S = \int_a^b 2\pi y ds, \qquad S = \int_a^b 2\pi x ds,$$

El teoremas formal que para calcular la longitud de una curva es el siguiente

LONGITUD DE ARCO EN FORMA PARAMÉTRICA

Si una curva suave C está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \quad y \quad y = g(t)$$

Donde C es una curva que no se corta así misma, y es recorrida una sola vez en el intervalo $[a,b]$, entonces la longitud de la curva en el intervalo está dada por

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

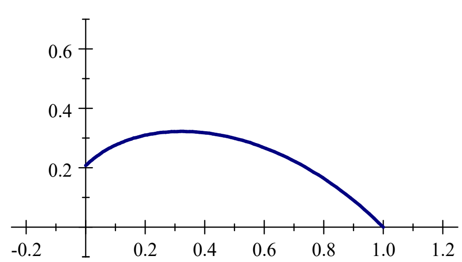
Ejemplo 1: Longitud de una curva con ecuaciones paramétricas

Calcule la longitud de la curva en el intervalo indicado

$$x = e^{-t}\cos t, \qquad y = e^{-t}\operatorname{sen} t \;, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Solución

La figura muestra la gráfica de la curva en el intervalo indicado, como puede verse la curva se recorre una sola vez y no se corta a sí misma en el intervalo $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$



La longitud de la curva está dada por

$$s = \int_a^b ds = \int_0^{\pi/2} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Donde

$$f'(t) = D_t\left(e^{-t}\cos t\right) = e^{-t}(-\operatorname{sen} t) + \cos t\left(-e^{-t}\right) = -e^{-t}\left(\operatorname{sen} t + \cos t\right)$$

$$g'(t) = D_t\left(e^{-t}\operatorname{sen}t\right) = e^{-t}(\cos t) + \operatorname{sen}t\left(-e^{-t}\right) = e^{-t}\left(\cos t - \operatorname{sen}t\right)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{\pi/2}\sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2}\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2}\sqrt{\left[-e^{-t}\left(\operatorname{sen}t + \cos t\right)\right]^2 + \left[e^{-t}\left(\cos t - \operatorname{sen}t\right)\right]^2}\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2}\sqrt{e^{-2t}\left(\operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen}t\cos t + \cos^2 t\right) + e^{-2t}\left(\cos^2 t - 2\cos t\operatorname{sen}t + \operatorname{sen}^2 t\right)}\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2}\sqrt{e^{-2t}\left(\operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen}t\cos t + \cos^2 t + \cos^2 t - 2\cos t\operatorname{sen}t + \operatorname{sen}^2 t\right)}\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} e^{-t}\sqrt{2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}\,dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} e^{-t}\,dt
\end{aligned}$$

Calculando la integral anterior y evaluando se obtiene

$$s = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} e^{-t}\,dt = \left[-\sqrt{2}\,e^{-t}\right]_0^{\pi/2} = -\sqrt{2}\left(e^{-\pi/2} - 1\right) \approx 1.1202$$

El teorema formal que para calcular la superficie de revolución es el siguiente

SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN EN FORMA PARAMÉTRICA

Si una curva suave C está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \quad y \quad y = g(t)$$

Donde C es una curva que no se corta así misma, y es recorrida una sola vez en el intervalo $[a,b]$, entonces la superficie de revolución en torno a los ejes de coordenadas está dada por

a. En torno al eje x

$$S = 2\pi\int_a^b y\,ds = 2\pi\int_a^b y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = 2\pi\int_a^b g(t)\sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2}\,dt$$

b. En torno al eje y

$$S = 2\pi\int_a^b x\,ds = 2\pi\int_a^b x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = 2\pi\int_a^b f(t)\sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2}\,dt$$

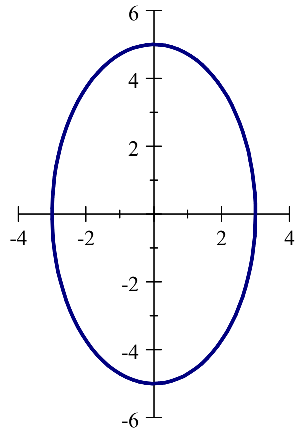
Ejemplo 2: Superficie de revolución de una curva con ecuaciones paramétricas

Plantee la integral (no la calcule), para calcular el área de la superficie de revolución que se obtiene al girar en torno al eje y, la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son

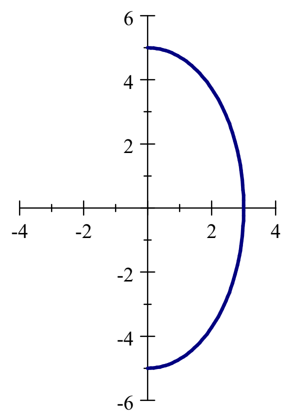
$$x = 3\cos t, \qquad y = 5\operatorname{sen}t\ ,$$

Solución

La figura muestra la gráfica de la elipse, que se ha dibujado en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$



Para calcular la superficie de revolución al girar la curva en alrededor del eje y hay que tener el cuidado de no tomar dos veces la curva. Se tomará el intervalo, $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, en el cual la gráfica de la curva es



La integral para calcular la superficie de revolución es

$$S = 2\pi \int_a^b x ds = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

O bien utilizando el hecho de que la curva es simétrica con respecto al eje x

$$S = 4\pi \int_0^{\pi/2} f(t)\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Calculando las derivadas

$$f'(t) = D_t(3\cos t) = -3\,\mathrm{sen}\, t$$

$$g'(t) = D_t(5\,\mathrm{sen}\, t) = 5\cos t$$

Sustituyendo y simplificando

$$\begin{aligned} S &= 4\pi\int_0^{\pi/2} 3\cos t\sqrt{[-3\operatorname{sen} t]^2+[5\cos t]^2}\,dt \\ &= 4\pi\int_0^{\pi/2} 3\cos t\sqrt{9\operatorname{sen}^2 t+25\cos^2 t}\,dt \\ &= 12\pi\int_0^{\pi/2} \cos t\sqrt{9\operatorname{sen}^2 t+25\cos^2 t}\,dt \end{aligned}$$

Ejercicios

Plantee una integral que represente la longitud de curva. Después utilice una calculadora para calcular la longitud de la curva con cuatro decimales.

1. $x = t + e^{-t}, \quad y = t - e^{-t}, \quad 0 \le t \le 2$

Encuentre la longitud exacta de la curva

2. $x = t\operatorname{sen} t, \quad y = t\cos t, \quad 0 \le t \le 1$

Plantee una integral que represente el área de la superficie obtenida al rotar la curva dada en torno al eje x. Después utilice una calculadora para calcular la longitud de la curva con cuatro decimales.

3. $x = t\operatorname{sen} t, \quad y = t\cos t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

4. $x = 1 + te^{t}, \quad y = (t^2+1)e^{t}, \quad 0 \le t \le 1$

Encuentre el área exacta de la superficie obtenida al rotar la curva dada en torno al eje x

5. $x = t^3, \quad y = t^2, \quad 0 \le t \le 1$

Encuentre el área exacta de la superficie obtenida al rotar la curva dada en torno al eje y

6. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \le t \le 5$

7.

Encuentre la longitud de la curva dada por las ecuaciones:

$$y = 10\ sen^3 t; \quad x = 10\ cos^3 t$$

(De su respuesta con 2 decimales como mínimo).

8.

La integral que representa la longitud de arco de la curva
$x = t^2 + 3; \quad y = 3t^2$ desde el punto (4, 3) al punto (12, 27) es:

Seleccione una:

- a. $\int_4^{12} \sqrt{4t^2 + 36t^2}\, dt$
- b. $\int_1^{3} \sqrt{36t^2 + 4t^2}\, dt$
- c. Ninguna de las otras es correcta.
- d. $\int_1^{3} \sqrt{2t^2 + 6t^2}\, dt$
- e. $\int_3^{27} \sqrt{2t^2 + 6t^2}\, dt$

9.

Encuentre el área superficial al hacer rotar alrededor del eje x, la curva definida por las ecuaciones

$$y = t^{1/2},\ x = t\ si\ 1 \le t \le 6$$

(Nota: de su respuesta con 2 decimales como mínimo).

10.

Indique la integral en coordenadas paramétricas que calcula el área de la superficie que se genera al girar alrededor del eje y, la curva definida por las ecuaciones:

$$x = -1 + 2sen\ \theta,\ y = 1 + 3\cos\ \theta,\ si\ 0 \le \theta \le \pi$$

Seleccione una:

- a. $2\pi \int_{0-\pi}^{\pi} (-1 + 2sen\theta)\sqrt{1 + (-3sen\theta)^2} d\theta$
- b. $2\pi \int_0^{\pi} (2sen\theta - 1)\sqrt{4 + 5sen^2\theta} d\theta$
- c. $2\pi \int_0^{\pi} (1 + 3\cos\theta)\sqrt{(2\cos\theta)^2 + (-3sen\theta)^2} d\theta$
- d. $2\pi \int_0^{\pi} (1 + 3\cos\theta)\sqrt{(4 + 5\cos^2\theta} d\theta$
- e. Ninguna de las otras opciones es correcta.

11.

El área superficial al girar la curva dada en ecuaciones paramétricas $x = a\,(t - sen\; t)$ & $y = a(1 - cos\; t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ alrededor del eje "x", es:

(Nota: a=constante).

Seleccione una:

- a. Ninguna de las otras es correcta.
- b. $\frac{16}{3}\pi a^2$.
- c. $\frac{32}{3}\pi a^2$.
- d. $\frac{128}{3}\pi a^2$.
- e. $\frac{64}{3}\pi a^2$.