

4.1 Curvas definidas por ecuaciones paramétricas

OBJETIVOS

- Dibujar la gráfica de una curva expresada en ecuaciones paramétricas.
- Trasladar la ecuaciones paramétricas de una curva a una ecuación de dos variables.

Ecuaciones paramétricas

Muchas de las curvas en un sistema de coordenadas cartesianas no pueden ser definidas por una ecuación de la forma $y = f(x)$, como se ha hecho hasta ahora. Otra forma de representar una curva en el plano consiste en definir x y y en términos de una tercera variable t , llamada **parámetro**.

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

Las ecuaciones anteriores reciben el nombre de **ecuaciones paramétricas** de una curva C . Cada valor de t determina un punto $P(x,y)$ en el plano cartesiano. El parámetro t generalmente está definido para un intervalo de números reales. Si no se indica otra cosa, el dominio de t será el subconjunto de números reales más grande que sea posible, de manera que tanto x como y sean números reales.

Ejemplo 1: Gráfica con ecuaciones paramétricas

a. Dibuje la representación gráfica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = 2t - 1, \quad y = t - t^2, \quad -3 \leq t \leq 3$$

b. Elimine el parámetro y encuentre una ecuación en términos de x y de y .

Solución

- a. Para dibujar la gráfica de una curva definida por ecuaciones paramétricas, se construye una tabla de valores en el intervalo indicado.

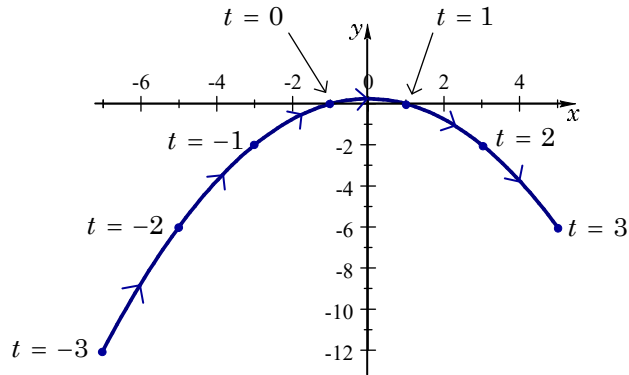
Por ejemplo, si $t = -2$, los valores correspondientes de x y y son

$$x = 2(-2) - 1 = -5 \quad y = (-2) - (-2)^2 = -6$$

La siguiente tabla muestra algunos de los puntos de la curva en el intervalo indicado

t	x	y	$P(x,y)$
-3	-7	-12	$(-7, -12)$
-2	-5	-6	$(-5, -6)$
-1	-3	-2	$(-3, -2)$
0	-1	0	$(-1, 0)$
1	1	0	$(1, 0)$
2	3	-2	$(3, -2)$
3	5	-6	$(5, -6)$

Al dibujar los puntos de la tabla anterior en un sistema de coordenadas rectangulares se obtiene la siguiente representación gráfica. Las flechas indican la dirección que toma la curva al aumentar los valores de t en el intervalo de valores de t .



- b. Para encontrar una ecuación equivalente que solo tenga las variables x y y , hay que eliminar el parámetro utilizando operaciones algebraicas. Las ecuaciones de la curva son

$$x = 2t - 1, \quad y = t - t^2, \quad -3 \leq t \leq 3$$

Despejando t en la primera ecuación

$$x = 2t - 1$$

$$x + 1 = 2t$$

$$\frac{x + 1}{2} = t$$

Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación se tiene

$$y = t - t^2$$

$$y = \left(\frac{x + 1}{2}\right) - \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2$$

Desarrollando operaciones y simplificando, se obtiene la ecuación en dos variables

$$y = \frac{x + 1}{2} - \frac{x^2 + 2x + 1}{4} = \frac{2x + 2 - x^2 - 2x - 1}{4} = \frac{-x^2 - 1}{4}$$

$$4y = -x^2 - 1$$

Que es la ecuación de una parábola vertical que abre hacia abajo.

Ejemplo 2: Gráfica con ecuaciones paramétricas

- a. Dibuje la representación gráfica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = 3\cos\theta, \quad y = 6\sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

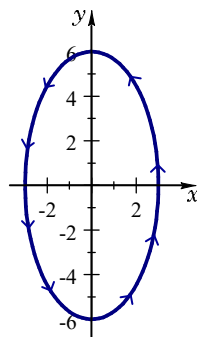
- b. Elimine el parámetro y encuentre una ecuación en términos de x y de y .

Solución

- a. Como en el ejemplo anterior, se construirá una tabla de valores, haciendo variar el valor del parámetro θ en el intervalo dado. La tabla obtenida es la siguiente

θ	x	y
0	3	0
$\pi/4$	2.12	4.24
$\pi/2$	0	6
$3\pi/4$	-2.12	4.24
π	-3	0
$5\pi/4$	-2.12	-4.24
$3\pi/2$	0	-6
$7\pi/4$	2.12	-4.24
2π	3	0

La figura siguiente muestra la gráfica de la curva resultante, que claramente es una elipse vertical centrada en el origen.



- b. Para obtener una ecuación en coordenadas rectangulares hay que utilizar la identidad trigonométrica $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ como se muestra a continuación.

$$x = 3 \cos \theta, \text{ entonces } \frac{x}{3} = \cos \theta$$

$$y = 6 \sin \theta, \text{ entonces } \frac{y}{6} = \sin \theta$$

Elevando al cuadrado las dos expresiones anteriores, sumándolas y utilizando la identidad trigonométrica se obtiene

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$$

La ecuación obtenida corresponde a una elipse vertical con centro en el origen, con

$$a = 6 \text{ y } b = 3.$$

Ejemplo 3: Gráfica de un cicloide

Dibuje la gráfica del cicloide, cuyas ecuaciones paramétricas son

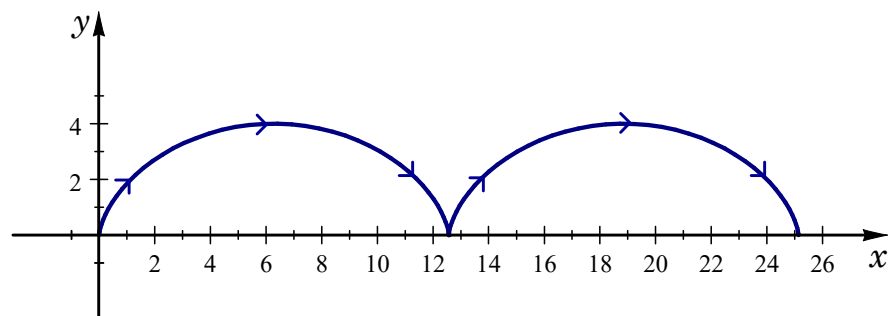
$$x = 2\theta - 2\sin\theta, \quad y = 2 - 2\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 4\pi$$

Solución

La tabla siguiente muestra algunos valores de x & y

θ	x	y
0	0	0
$\pi/2$	1.14	2
π	6.28	4
$3\pi/2$	11.43	2
2π	12.57	0
$5\pi/2$	13.71	2
3π	18.85	4
$7\pi/2$	23.99	2
4π	25.13	0

La figura siguiente muestra la gráfica de la curva en el intervalo requerido



Muchas de las curvas representadas por ecuaciones paramétricas, resulta muy complicado dibujar su gráfica utilizando tablas de valores. El uso de la tecnología resulta de mucha utilidad en estos casos. En el ejemplo siguiente se dibuja la gráfica de una curva definida por ecuaciones paramétricas utilizando un programa de cómputo.

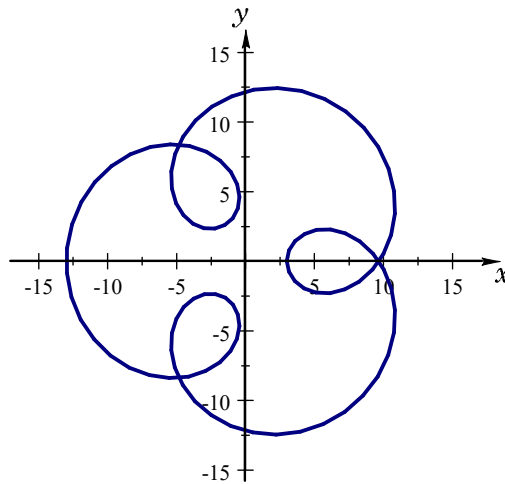
Ejemplo 4: Gráfica con ecuaciones paramétricas usando tecnología

Utilice un programa de cómputo para dibujar la representación gráfica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = 8\cos t - 5\cos\left(\frac{8t}{2}\right), \quad y = 8\sin t - 5\sin\left(\frac{8t}{2}\right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solución

Al utilizar un programa de cómputo para dibujar la curva se obtiene la siguiente gráfica.



Ejercicios

Bosqueje la curva ubicando puntos por medio de las ecuaciones paramétricas dadas. Indique con una flecha la dirección en que se traza la curva cuando t crece

1. $x = t^2 + t, \quad y = t^2 - t, \quad -2 \leq t \leq 2$

2. $x = \cos^2 t, \quad y = 1 - \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

3. $x = \sin \frac{1}{2}\theta, \quad y = \cos \frac{1}{2}\theta, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$

4. $x = e^{2t}, \quad y = t + 1,$

5. $x = 3 + 2\cos t, \quad y = 1 + 2\sin t, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$

6. $x = e^t \cos t; y = e^t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

En los ejercicios siguientes bosqueje la curva ubicando puntos por medio de las ecuaciones paramétricas dadas. Indique con una flecha la dirección en que se traza la curva cuando t crece. Elimine el parámetro para hallar la ecuación cartesiana de la curva

7. $x = 3 - 4t, \quad y = 2 - 3t$

8. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

9. $x = \ln t \quad y = t, \quad 1 \leq t \leq e^2$

10. $x = 2\cos^3 t \quad y = 2\sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

11. $x = \sin t, \quad y = \sin^2 t + 1; \quad 0 \leq t \leq \pi.$

12. $r = 1 + \sin \theta \quad y \quad r = 1 + \cos \theta, \quad 0 \leq t \leq \pi$

13.

Encuentre las ecuaciones paramétricas de la ecuación $y = 4x^2$ que satisfacen la condición que $t = 0$ en el punto $(5, 100)$.

Seleccione una:

- ☐ a. Ninguna de las otras opciones es correcta.
- ☐ b. $x = t, y = 4t^2$
- ☐ c. $x = t^2 + 5, y = 4t^2 + 40t + 100$
- ☐ d. $x = t + 5, y = 4t^2 + 40t + 100$
- ☐ e. $x = -t + 5, y = 4t^2 + 40t + 100$

14.

Escriba la correspondiente ecuación cartesiana para la curva representada por la ecuaciones paramétricas

$$x = e^{2t} - 1; y = e^{4t}$$

Seleccione una:

- ☐ a. $y = \frac{\ln x}{4}$
- ☐ b. $y = 2\ln(x + 1)$
- ☐ c. $y = (x + 1)^4$
- ☐ d. Ninguna de las otras es correcta
- ☐ e. $y = (x + 1)^2$

15.

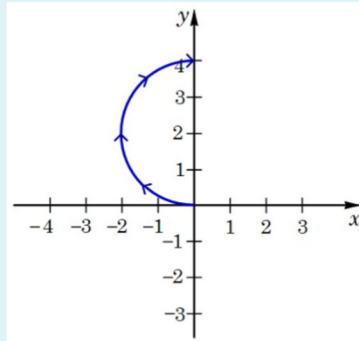
De las siguientes ecuaciones paramétricas, tomando el dominio correspondiente a cada una de ellas, la gráfica de cuál o cuáles de ellas no pasan por el tercer cuadrante al realizar su gráfica en el plano cartesiano

Seleccione una:

- ☐ a. $x = \sen t, y = \tan^2 t$
- ☐ b. $x = t, y = t$
- ☐ c. $x = -e^{-t}, y = -e^t$
- ☐ d. $x = \cot t, y = -\csc t$
- ☐ e. Ninguna de las otras opciones es correcta.

16.

La figura muestra una curva orientada que tiene la forma de un semicírculo de radio 2. ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas que describen dicha curva?



Seleccione una:

- ☐ a. $x = -2 \sin t, y = 2 + 2 \cos t, 0 \leq t \leq \pi$
- ☐ b. $x = -2 \cos t, y = 2 + 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$
- ☐ c. $x = 2 \cos t, y = 2 - 2 \sin t, 0 \leq t \leq \pi$
- ☐ d. $x = -2 \sin t, y = 2 - 2 \cos t, 0 \leq t \leq \pi$
- ☐ e. Ninguna de las otras respuestas es correcta