3.2 Teorema de Rolle y del valor medio

OBJETIVOS

- Encontrar el valor de *c* que satisface las condiciones del teorema de Rolle.
- Encontrar el valor de *c* que satisface las condiciones del teorema del valor medio

En esta sección se estudian dos teoremas fundamentales del cálculo, el teorema de Rolla y el teorema del valor medio. La importancia de estos teoremas radica en que, por medio de ellos se demuestran otros teoremas importantes del cálculo.

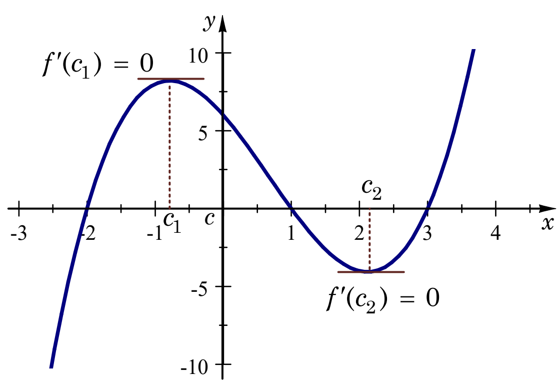
Teorema de Rolle

Si *f* es una función que satisface las condiciones siguientes

1. *f* es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. *f* es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)
3. $f(a) = f(b) = 0$

Entonces existe al menos un número *c* en el intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

La siguiente figura muestra la gráfica de una función que satisface las tres condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-2, 3]$ y tiene dos valores c_1 y c_2 que satisfacen las condiciones del teorema.



Ejemplo 1: Teorema de Rolle

Determine si la función satisface las condiciones del teorema de Rolle sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, determine todos los valores de *c* que satisfacen el teorema. Ilustre su resultado dibujando la gráfica de la función en el intervalo indicado.

$$f(x) = x^{2/3} - 3x^{1/3} + 2; \qquad [1, 8]$$

Solución

a. La primera condición establece que la función debe ser continua en el intervalo cerrado $[1, 8]$. La función que se está estudiando contiene raíces cúbicas y sumas, como la raíz cúbica es continua en todos los números reales, se tiene que la función si es continua en el intervalo $[1, 8]$

b. La segunda condición establece que la función debe ser derivable en el intervalo abierto $(1,8)$. Calculando la primera derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x\left(x^{2/3} - 3x^{1/3} + 2\right) \\ &= \frac{2}{3}x^{-1/3} - x^{-2/3} \\ &= \frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{1}{x^{2/3}} \\ &= \frac{2x^{1/3} - 3}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

La derivada no está definida únicamente para $x = 0$. Por lo tanto, si es derivable en el intervalo abierto $(1,8)$

c. La tercera condición establece que $f(1) = f(8) = 0$. Evaluando la función en los extremos del intervalo

$$f(1) = (1)^{2/3} - 3(1)^{1/3} + 2 = 1 - 3 + 3 = 0$$

$$f(8) = (8)^{2/3} - 3(8)^{1/3} + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$$

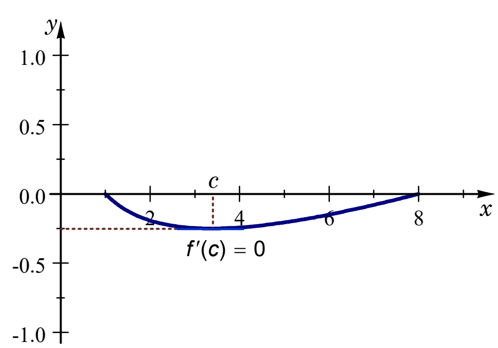
Como se satisfacen las tres condiciones, el teorema garantiza que existe al menos un número c en el intervalo $(1,8)$, tal que $f'(c) = 0$, es decir

$$f'(c) = \frac{2c^{1/3} - 3}{3c^{2/3}} = 0$$

Despejando el valor de c

$$\begin{aligned} 2c^{1/3} - 3 &= 0 \\ 2c^{1/3} &= 3 \\ c^{1/3} &= \frac{3}{2} \\ c &= \left(\frac{3}{2}\right)^3 \\ c &= \frac{27}{8} = 3.375 \end{aligned}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la función en el intervalo $[1, 8]$



El teorema de Rolle se usa fundamentalmente en el cálculo para demostrar el teorema del valor medio, uno de los teoremas más importantes del cálculo, qué a la vez, se utiliza para demostrar muchos otros teoremas del cálculo diferencial e integral.

Teorema del valor medio

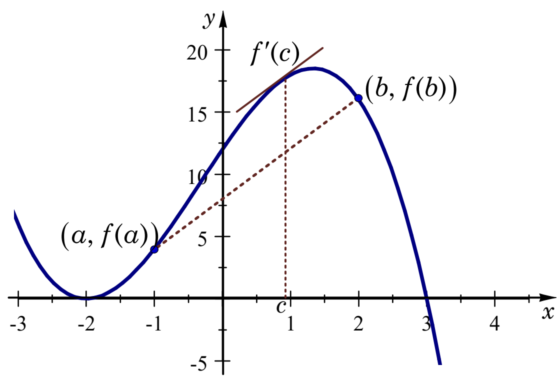
Si f es una función que satisface las condiciones siguientes

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es diferenciable en el intervalo abierto (a, b)

Entonces existe al menos un número c en el intervalo (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

La siguiente figura muestra la gráfica de una función que satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo y tiene un valor de c que satisface las condiciones del teorema.



Observe que este teorema asegura que existe al menos un número c entre a y b tal que la pendiente de la recta tangente en c es igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

Ejemplo 2: Teorema del valor medio

Determine si la función satisface las condiciones del teorema del valor medio sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, determine todos los valores de c que satisfacen el teorema. Ilustre su resultado dibujando la gráfica de la función en el intervalo indicado.

$$f(x) = x + \frac{4}{x}; \qquad [1, 5]$$

Solución

a. La primera condición establece que la función debe ser continua en el intervalo cerrado $[1, 5]$. La función $f(x) = x + \frac{4}{x}$ es discontinua únicamente en $x = 0$, que no está en el intervalo, por lo que se concluye que la función es continua en el intervalo $[1, 5]$

b. La segunda condición establece que la función debe ser derivable en el intervalo abierto $(1,5)$. Calculando la primera derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x\left(x + \frac{4}{x}\right) \\ &= 1 - \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 4}{x^2} \end{aligned}$$

La derivada no está definida únicamente para $x = 0$, que no está en el intervalo $(1,5)$ Por lo tanto, si es derivable en el intervalo abierto $(1,5)$

Como se satisfacen las dos condiciones, el teorema del valor medio garantiza que existe al menos un número c en el intervalo $(1,5)$, tal que

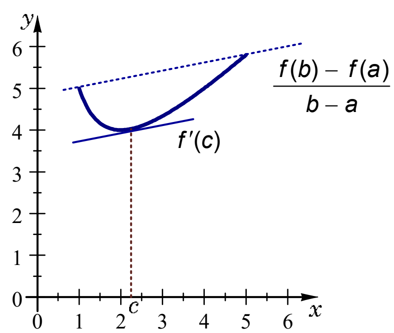
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Despejando el valor de c

$$f'(c) = \frac{\left(5 + \frac{4}{5}\right) - \left(1 + \frac{4}{1}\right)}{5 - 1} = \frac{\frac{29}{5} - 5}{4} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{c^2 - 4}{c^2} &= \frac{1}{5} \\ 5(c^2 - 4) &= c^2 \\ 4c^2 &= 20 \\ c^2 &= 5 \\ c &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la función en el intervalo $[1, 5]$. También se muestra la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, así como la pendiente de la recta tangente en c



Ejercicios sobre el teorema de Rolle y del valor medio

En los ejercicios 1 a 16, determine si la función satisface las condiciones del teorema de Rolle sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, determine todos los valores de c que satisfacen el teorema. En el caso que alguna condición no se cumpla, indique cuál de ellas es. Ilustre su resultado dibujando la gráfica de la función en el intervalo indicado.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3; \quad [1, 3]$

2. $f(x) = x^3 + 27; \quad [-3, 2]$

3. $f(x) = x^3 + x^2; \quad [-1, 0]$

4. $f(x) = x(x - 2)^2 + x^2; \quad [0, 2]$

5. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2; \quad [1, 2]$

6. $f(x) = \operatorname{sen} x; \quad [-\pi, 0]$

7. $f(x) = \operatorname{sen} 2x; \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

8. $f(x) = 2\cos^2 x; \quad \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

9. $f(x) = x^{4/3} - 3x; \quad [0, 3]$

10. $f(x) = x^{3/4} - 2x^{1/4}; \quad [0, 4]$

11. $f(x) = \tan x; \quad [0, \pi]$

12. $f(x) = 1 - |x|; \quad [-1, 1]$

13. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 3}; \quad [-2, 1]$

14. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x}; \quad [-2, 1]$

15. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < 1 \\ 5x - 8 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}; \quad \left[-2, \dfrac{8}{5}\right]$

16. $f(x) = \begin{cases} 3x + 6 & \text{si} \quad x < 1 \\ x - 4 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}; \quad [-2, 4]$

En los ejercicios 17 a 32, determine si la función satisface las condiciones del teorema del valor medio sobre el intervalo indicado. En caso afirmativo, determine todos los valores de c que satisfacen el teorema. En el caso que alguna condición no se cumpla, indique cuál de ellas es. Ilustre su resultado dibujando la gráfica de la función en el intervalo indicado.

17. $f(x) = x^2; \quad [0, 3]$

18. $f(x) = x^3 + x; \quad [1, 3]$

19. $f(x) = x^4 - 2x^2; \quad [-3, 3]$

20. $f(x) = x^3 + x^2 - x; \quad [-2, 1]$

21. $f(x) = x^{2/3}; \quad [0, 1]$

22. $f(x) = x^{1/3} - x; \quad [-8, 1]$

23. $f(x) = \dfrac{1}{2x}; \quad [1, 3]$

24. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 7}; \quad [2, 6]$

25. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}; \quad [1, 3]$

26. $f(x) = 1 + \sqrt{x}; \quad [0, 4]$

27. $f(x) = \sqrt{4x + 1}; \quad [2, 6]$

28. $f(x) = \operatorname{sen} x; \quad \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

29. $f(x) = \tan 2x; \quad \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

30. $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}; \quad [0, \pi]$

31. $f(x) = \dfrac{4}{(x - 3)^2}; \quad [1, 6]$

32. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si} \quad x < 1 \\ 15 - 2x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}; \quad [-1, 5]$