

2.4 Derivación implícita

INTRODUCCIÓN

La derivación implícita se utiliza para calcular la derivada en ecuaciones en donde no se puede, o bien es muy difícil, despejar la variable dependiente en términos de la variable independiente para obtener una función expresada de manera explícita.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de esta unidad el estudiante estará en capacidad de

- Encontrar la derivada en una ecuación de dos variables usando derivación implícita.
- Calcular derivadas de orden superior utilizando derivación implícita.
- Resolver problemas de razones de cambio en donde el modelo es una ecuación que debe derivarse usando derivación implícita.

Derivación implícita

Se dice que y está expresada explícitamente en términos de x cuando y es una función de x , es decir que existe una función $y = f(x)$, por ejemplo en la ecuación $y = x^2 + 2x - 3$.

Cuando y no está despejada en términos de x , se dice que las variables están relacionadas implícitamente, como por ejemplo en la ecuación $xy + 1 = x^2y + y^2$, en donde la variable y aparece en ambos lados de la ecuación.

Para calcular la derivada de y con respecto a x se utiliza el procedimiento llamado derivación implícita y que se describe a continuación

1. Derive ambos lados de la ecuación con respecto a x , utilizando las reglas de derivación.
2. Agrupar todos los términos que contienen la derivada de y con respecto a x en el lado izquierdo de la ecuación y todos los términos que no contienen la derivada en el lado derecho de la ecuación. La derivada se puede representar en cualquiera de las formas: $\frac{dy}{dx}$, $D_x y$ o y'
3. Tome la derivada como factor común en el lado izquierdo de la ecuación.
4. Despeje la derivada trasladando a dividir al lado derecho de la ecuación el factor que la acompaña.

La clave de la derivación implícita consiste en suponer que existe una función $y = f(x)$ que no se pueda expresar explícitamente; entonces al aplicar las reglas de derivación para y siempre se debe utilizar la regla de la cadena ya que y es una función de x .

$$f(x) = y$$

$$g(f(x)) = g(y)$$

$$D_x[g(f(x))] = D_x[g(y)]$$

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(y) \cdot D_x y$$

Observe algunas funciones y su correspondiente derivación implícita

$$D_x(x^2) = 2x$$

$$D_x(y^2) = 2y \cdot D_x y$$

$$D_x(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$D_x(y^{2/3}) = \frac{2}{3}y^{-1/3} \cdot D_x y$$

$$D_x(\tan x) = \sec^2 x$$

$$D_x(\tan y) = \sec^2 y \cdot D_x y$$

Ejemplo 1: Derivación explícita y derivación implícita

- Utilice derivación normal para encontrar la pendiente de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3,4)$. Dibuje la gráfica de la curva y la recta tangente.
- Utilice derivación implícita para encontrar la pendiente de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3,4)$. Dibuje la gráfica de la circunferencia y la recta tangente.

Solución

- Para utilizar la derivación normal cuando nos dan una ecuación y no una función, es necesario desmenujar la variable dependiente, siempre que esto sea posible.

Despejando y en la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Aquí nos enfrentamos al primer problema, tomamos el signo positivo o el negativo. Como el punto está en el primer cuadrante, utilizaremos la mitad superior de la circunferencia, cuya ecuación es

$$y = +\sqrt{25 - x^2}$$

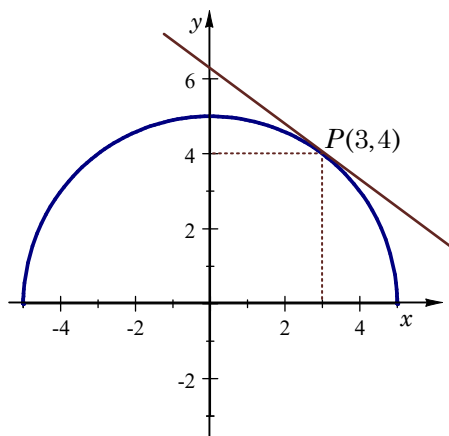
Usando la regla de la cadena para obtener la primera derivada

$$\begin{aligned} D_x y &= D_x [\sqrt{25 - x^2}] = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) \\ &= \frac{-2x}{2(25 - x^2)^{1/2}} = \frac{-x}{(25 - x^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Cuando $x = 3$, la pendiente de la recta tangente es

$$m = \frac{-(3)}{(25 - 3^2)^{1/2}} = \frac{-3}{\sqrt{16}} = -\frac{3}{4}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la función y la recta tangente en el punto $(3,4)$



- b. Al utilizar derivación implícita no hace falta despejar la variable dependiente. Lo que se hace es derivar ambos lados con respecto a la variable independiente

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$D_x(x^2 + y^2) = D_x(25)$$

$$2x + 2y \cdot D_x y = 0$$

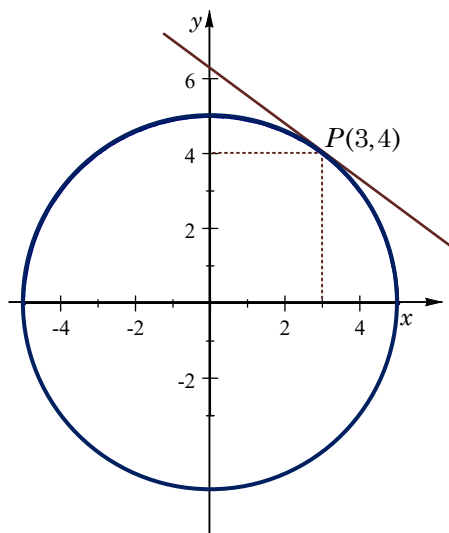
$$2y \cdot D_x y = -2x$$

$$D_x y = \frac{-x}{y}$$

A diferencia de la derivación normal, para evaluar una derivada implícita hay que sustituir las dos coordenadas del punto (3,4) para encontrar la pendiente

$$m = D_x y = \frac{-x}{y} = -\frac{3}{4}$$

La siguiente figura muestra la gráfica de la circunferencia y la recta tangente en el punto (3,4)



Otra ventaja de utilizar derivación implícita, es que, se puede encontrar la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la circunferencia y no solo en la mitad superior o mitad inferior.

Ejemplo 2: Derivación implícita

Utilice derivación implícita para calcular $D_x y$

$$2x^2 + 3y^3 = 12xy$$

Solución

Se comienza derivando ambos lados de la ecuación respecto a la variable x

$$D_x[2x^2 + 3y^3] = D_x[12xy]$$

Usando las reglas de derivación para derivar ambos lados. Observe que el lado izquierdo es una suma mientras que el lado derecho es un producto

$$D_x(2x^2) + D_x(3y^3) = (12x)D_x(y) + yD_x(12x)$$

Ahora se usan las reglas de derivación conocidas

$$4x + 9y^2D_x y = (12x)D_x y + y(12)$$

Observe en la ecuación anterior que al derivar la variable y en términos de x se usa la regla de la cadena y por eso se multiplica por $D_x y$.

Trasladando los términos que contienen la derivada al lado izquierdo de la ecuación

$$9y^2D_x y - 12xD_x y = 12y - 4x$$

Factorizando $D_x y$

$$D_x y(9y^2 - 12x) = 12y - 4x$$

Despejando la derivada

$$D_x y = \frac{12y - 4x}{9y^2 - 12x}$$

Finalmente se puede simplificar la respuesta

$$D_x y = \frac{4(3y - x)}{3(3y^2 - 4x)}$$

Ejemplo 3: Derivación implícita con funciones trigonométricas

Utilice derivación implícita para calcular la primera derivada

$$x^4 y^3 = \tan(x + y)$$

Solución

Este caso tiene la dificultad adicional de incluir funciones trigonométricas. Derivando ambos lados con respecto a x se tiene

$$D_x[x^4 y^3] = D_x[\tan(x + y)]$$

$$x^4 D_x(y^3) + y^3 D_x(x^4) = \sec^2(x + y) \cdot D_x(x + y)$$

$$x^4(3y^2)D_x y + y^3(4x^3) = \sec^2(x + y) \cdot (1 + D_x y)$$

Para despejar $D_x y$ es necesario desarrollar el producto del lado derecho y trasladar los términos que contienen la derivada al lado izquierdo

$$3x^4 y^2 D_x y + 4x^3 y^3 = \sec^2(x + y) + \sec^2(x + y) D_x y$$

$$3x^4 y^2 D_x y - \sec^2(x + y) D_x y = \sec^2(x + y) - 4x^3 y^3$$

$$D_x y(3x^4 y^2 - \sec^2(x + y)) = \sec^2(x + y) - 4x^3 y^3$$

$$D_x y = \frac{\sec^2(x + y) - 4x^3 y^3}{3x^4 y^2 - \sec^2(x + y)}$$

La expresión anterior ya no se puede simplificar más, por lo que la respuesta es

$$D_x y = \frac{\sec^2(x + y) - 4x^3 y^3}{3x^4 y^2 - \sec^2(x + y)}$$

Ejemplo 4: Derivación implícita con funciones compuestas

Calcule la derivada $D_x y$ si

$$x^2 - 2x^2y^3 + y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

Solución

Derivando ambos lados con respecto a x se tiene

$$\begin{aligned} D_x [x^2 - 2x^2y^3 + y^2] &= D_x [(x^2 + y^2)^2] \\ D_x (x^2) - D_x (2x^2y^3) + D_x (y^2) &= 2(x^2 + y^2)D_x (x^2 + y^2) \\ 2x - (2x^2 \cdot 3y^2 D_x y + y^3 \cdot 4x) + 2y D_x y &= 2(x^2 + y^2)(2x + 2y D_x y) \end{aligned}$$

Ahora que se han calculado todas las derivadas hay que trasladar al lado izquierdo todos los términos que contienen la derivada, para poder despejarla

$$\begin{aligned} 2x - 6x^2y^2 D_x y - 4xy^3 + 2y D_x y &= 4x^3 + 4x^2y D_x y + 4xy^2 + 4y^3 D_x y \\ -6x^2y^2 D_x y + 2y D_x y - 4x^2y D_x y - 4y^3 D_x y &= 4x^3 + 4xy^2 - 2x + 4xy^3 \\ D_x y (-6x^2y^2 + 2y - 4x^2y - 4y^3) &= 4x^3 + 4xy^2 - 2x + 4xy^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x y &= \frac{4x^3 + 4xy^2 - 2x + 4xy^3}{-6x^2y^2 + 2y - 4x^2y - 4y^3} \\ &= \frac{2x(2x^2 + 2y^2 - 1 + 2y^3)}{2y(-3x^2y + 1 - 2x^2 - 2y^2)} \\ &= -\frac{x(2x^2 + 2y^2 + 2y^3 - 1)}{y(2x^2 + 2y^2 + 3x^2y - 1)} \end{aligned}$$

Ejemplo 5: Derivación implícita con funciones compuestas

Calcule la derivada $D_x y$ si

$$\sin(x + y) = x \cos y + y \cos x$$

Solución

En la solución de este problema se representará la derivada como $D_x y = y'$. Derivando ambos lados con respecto a x se tiene

$$\begin{aligned} D_x [\sin(x + y)] &= D_x [x \cos y + y \cos x] \\ \cos(x + y) \cdot D_x (x + y) &= (x \cdot D_x (\cos y) + \cos y \cdot D_x x) + (y \cdot D_x (\cos x) + \cos x \cdot D_x y) \\ \cos(x + y) \cdot (1 + y') &= (x \cdot (-\sin y \cdot y') + \cos y \cdot (1)) + (y \cdot (-\sin x) + \cos x \cdot y') \end{aligned}$$

Ordenando los términos y desarrollando los productos se tiene

$$\cos(x + y) + \cos(x + y) \cdot y' = -x \sin y \cdot y' + \cos y - y \sin x + \cos x \cdot y'$$

Trasladando al lado izquierdo los términos que contienen la derivada y despejando

$$\begin{aligned}\cos(x+y) \cdot y' + x \operatorname{sen} y \cdot y' - \cos x \cdot y' &= \cos y - y \operatorname{sen} x - \cos(x+y) \\ y'(\cos(x+y) + x \operatorname{sen} y - \cos x) &= \cos y - y \operatorname{sen} x - \cos(x+y) \\ y' &= \frac{\cos y - y \operatorname{sen} x - \cos(x+y)}{\cos(x+y) + x \operatorname{sen} y - \cos x}\end{aligned}$$

Ejemplo 6: Derivación implícita de segundo orden

Calcule la segunda derivada y''

$$x^{1/2} + y^{1/2} = 2$$

Solución

Derivando ambos lados con respecto a x

$$D_x(x^{1/2} + y^{1/2}) = D_x 2$$

$$\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2} \cdot y' = 0$$

Despejando la primera derivada

$$\frac{1}{2}y^{-1/2} \cdot y' = -\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$y' = \frac{-\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\frac{1}{2}y^{-1/2}}$$

$$y' = -\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}$$

Derivando nuevamente con respecto a x para obtener la segunda derivada

$$D_x(y') = D_x\left(-\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}\right)$$

$$\begin{aligned}y'' &= -\frac{x^{1/2} \cdot D_x(y^{1/2}) - y^{1/2} \cdot D_x(x^{1/2})}{(x^{1/2})^2} \\ &= -\frac{x^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2}y^{-1/2} \cdot y'\right) - y^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)}{x}\end{aligned}$$

Como en la segunda derivada, aparece la primera derivada, hay que sustituir la expresión obtenida para la primera derivada

$$y' = -\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}$$

Haciendo la sustitución y simplificando

$$\begin{aligned}
 y'' &= -\frac{x^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot \left(-\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}} \right) \right) - y^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} \right)}{x} \\
 &= -\frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}}{x} \\
 y'' &= \frac{x^{1/2} + y^{1/2}}{2x^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Finalmente, como se sabe que $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$. Al sustituir esta expresión en la segunda derivada, se obtiene una respuesta más simple

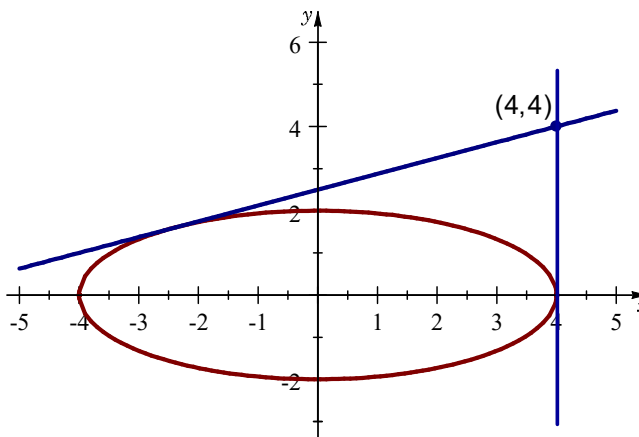
$$\begin{aligned}
 y'' &= \frac{2}{2x^{3/2}} \\
 &= \frac{1}{x^{3/2}}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 7: Rectas tangentes a una elipse

Encuentre las dos ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$ y que pasan por el punto $(4,4)$

Solución

La siguiente figura muestra la gráfica de la elipse y las dos rectas cuyas ecuaciones se buscan



La pendiente de la recta tangente a la elipse se puede calcular por derivación implícita

$$\begin{aligned}
 D_x(x^2 + 4y^2) &= D_x 16 \\
 2x + 8yy' &= 0 \\
 y' &= -\frac{2x}{8y} \\
 &= -\frac{x}{4y}
 \end{aligned}$$

Si (a,b) el punto sobre la elipse, en donde la recta es tangente a la elipse, la pendiente de la recta tangente a la elipse en el punto (a,b) es

$$m = -\frac{a}{4b}$$

La pendiente de la recta tangente también puede expresarse como la pendiente entre dos puntos $(4,4)$ y (a,b) , es decir

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b-4}{a-4}$$

Igualando las dos pendientes se obtiene una ecuación con 2 variables

$$-\frac{a}{4b} = \frac{b-4}{a-4}$$

$$-a(a-4) = 4b(b-4)$$

$$-a^2 + 4a = 4b^2 - 16b$$

$$a^2 + 4b^2 - 4a - 16b = 0$$

Como el punto (a,b) está en la elipse, entonces satisface la ecuación de la misma, es decir

$$a^2 + 4b^2 = 16$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior y despejando b

$$16 - 4a - 16b = 0$$

$$16 - 4a = 16b$$

$$\frac{4-a}{4} = b$$

Sustituyendo en la ecuación $a^2 + 4b^2 = 16$ y despejando a

$$a^2 + 4\left(\frac{4-a}{4}\right)^2 = 16$$

$$a^2 + \frac{16-8a+a^2}{4} - 16 = 0$$

$$4a^2 + 16 - 8a + a^2 - 64 = 0$$

$$5a^2 - 8a - 48 = 0$$

$$(a-4)(5a+12) = 0$$

De donde se obtiene que $a = 4$ y $a = -\frac{12}{5}$

Para $a = 4$, se tiene

$$b = \frac{4-a}{4} = \frac{4-4}{4} = 0$$

La pendiente de la recta tangente en el punto $(4,0)$ es

$$m = \frac{-a}{4b} = \frac{-4}{0}, \text{ no está definida}$$

La ecuación de la recta tangente es

$$x = 4$$

Para $a = -\frac{12}{5}$, se tiene que $b = \frac{4 + \frac{12}{5}}{4} = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}$

La pendiente de la recta tangente en el punto $\left(-\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$ es

$$m = \frac{-a}{4b} = \frac{-\frac{12}{5}}{4\left(-\frac{8}{5}\right)} = \frac{3}{8}$$

La ecuación de la recta tangente es

$$y - \frac{8}{5} = \frac{3}{8}\left(x + \frac{12}{5}\right)$$

$$40y - 64 = 15x + 36$$

$$15x - 40y + 100 = 0$$

$$3x - 8y + 20 = 0$$

Ejercicios sobre derivación implícita

En los ejercicios 1 a 20 encuentre la primera derivada y' utilizando derivación implícita.

1. $x^3y^3 - 2x^2y + 3xy^2 = 100$

2. $x^2 + y^2 = \cos(xy)$

3. $\sqrt{x+y} = (x^2 - y^2)^2$

4. $y\sqrt{2+3x} + x\sqrt{1+y} = xy$

5. $y^5 + x^2y^3 = 1 + x^2 \operatorname{sen} y$

6. $\tan x + \tan y = \cos(x+y)$

7. $x^2y^3 + e^{y^3} = \operatorname{sen}(x+y)$

8. $\cos(x-y) = x^3y^4$

9. $x^2y^3 + x \operatorname{sen} y = 4$

10. $x \cos y + y \cos x = xy$

11. $(\operatorname{sen} \pi x - \cos \pi x)^2 = \operatorname{sen} \pi x \cos \pi x$

12. $\sqrt{x+y} = \sqrt[3]{x-y}$

13. $\tan(x-y) = \frac{y}{x}$

14. $y = 4 \operatorname{sen} \sqrt{y+\sqrt{t}}$

15. $y^2x + \frac{2}{x^3} = \csc\left(\frac{x}{y}\right)$

16. $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 1$

17. $\operatorname{sen}(xy) = xy + x^2 + y^2$

18. $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$

19. $\cos^2(x-y) + \sqrt{1+x^2y^2} = \operatorname{sen} y$

20. $\frac{\sec(xy)}{x^2} - \tan(x-y) = (x^2 + y^2)^2$

En los ejercicios 21 a 24 calcule la segunda derivada de y con respecto a x . Exprese su respuesta de tal manera que no contenga derivadas

21. $x^2 + y^2 = 1$

22. $x^3 + y^3 = 1$

23. $x^{1/2} + y^{1/2} = 4$

24. $x^2 + 4y^2 = 16$

25. La curva Kappa está dada por $y^2(x^2 + y^2) = 2x^2$. Encuentre la ecuación de la recta tangente a Kappa en $(-1, -1)$.

26. Encuentre la ecuación de la recta tangente para la curva del diablo en el punto $(0, -2)$

$$y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$$

27. Halle las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12, 3)$.

28. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ en el punto $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$.

29. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto donde $x = 0$

$$y^4 - x + x^2y = xy^2 + y^2$$

30. Una partícula se mueve de acuerdo a la ecuación

$$\sin(t + s) = t \cos(s^2), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Calcule la velocidad de la partícula para $t = 0$. Considere s en metros y t en segundos.

31. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y$ en el punto $(1,1)$

32. La ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$ es una elipse rotada, es decir una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes de coordenadas. Encuentre los puntos donde esta elipse cruza al eje y . Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en esos puntos y muestre que son paralelas.

33. Encuentre los puntos de la curva $xy = (1 - x - y)^2$ en donde la recta tangente es horizontal.

34. Encuentre las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(-1,3)$ y que son tangentes a la curva

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0.$$

Problemas del portal UEDI

35.

¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva $a^2x^2 + b^2y^2 = 4 + xy$ en el punto $(2/a, 0)$?

Seleccione una:

☐ a. $-2a^2$

☐ b. $2a^2 - 2a$

☐ c. 2

☐ d. $2a^2$

☐ e. Ninguna de las otras opciones es correcta

36.

Encuentre la intersección con el eje x de la recta que cumple con ser tangente a la curva $2y^2 + 1.2xy + x^2 = 32$ en el punto sobre la curva donde $x = 0$ con $y > 0$.

Aproxime su respuesta hasta la centésima más cercana (dos decimales).

Respuesta:

37.

Si $g(x) + x^2[g(x)]^3 = -10$ y $g(3) = -1$, encuentre $g'(3)$

(si fuera necesario, su respuesta con dos cifras decimales)

Respuesta: