

2.3 Sustitución trigonométrica

OBJETIVOS

- Calcular integrales utilizando la técnica de sustitución trigonométrica.

En esta sección se estudian las integrales que contienen expresiones de la forma

$$a^2 - u^2, \quad a^2 + u^2, \quad u^2 - a^2$$

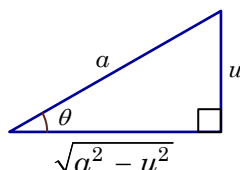
Usualmente estas expresiones se encuentran elevadas a una potencia racional positiva o negativa.

Caso 1

Para calcular una integral que contiene

$$a^2 - u^2$$

Se construye un triángulo rectángulo en donde a es la hipotenusa, u es el cateto opuesto y θ es el ángulo agudo. Al calcular el cateto adyacente por medio del teorema de Pitágoras se obtiene $\sqrt{a^2 - u^2}$, como se muestra en la figura siguiente



Al relacionar el cateto opuesto con la hipotenusa se obtiene

$$\text{sen } \theta = \frac{u}{a}$$

Despejando u , la integral se puede resolver haciendo la sustitución

$$u = a \text{sen } \theta$$

El diferencial du correspondiente es

$$du = a \cos \theta d\theta$$

Una vez calculada la integral en términos del ángulo θ será necesario utilizar las siguientes expresiones para expresar la integral en términos de la variable inicial u

$$\text{sen } \theta = \frac{u}{a}, \quad \theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right), \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a}, \quad \tan \theta = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

Ejemplo 1: Integración por sustitución trigonométrica

Calcule la integral

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx$$

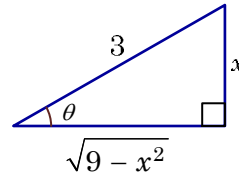
Solución

Esta es una integral que se presenta frecuentemente en los cálculos matemáticos ya que puede representar el área de una semicircunferencia de radio 3 cuando los límites de integración van de -3 a 3

Como se puede observar la integral tiene una expresión de la forma

$$a^2 - u^2 = (3)^2 - x^2$$

x y 3 se pueden representar como lados de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura siguiente



El cateto adyacente se obtiene utilizando el teorema de Pitágoras. La sustitución a realizar se puede obtener fácilmente utilizando razones trigonométricas

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{3}$$

$$x = 3 \operatorname{sen} \theta$$

Calculando el diferencial dx

$$dx = 3 \cos \theta d\theta$$

Sustituyendo x y dx en la integral propuesta se obtendrá una integral que solo contiene funciones trigonométricas

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9 - x^2} dx &= \int \sqrt{9 - (3 \operatorname{sen} \theta)^2} (3 \cos \theta d\theta) \\ &= 3 \int \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= 3 \int \sqrt{9(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

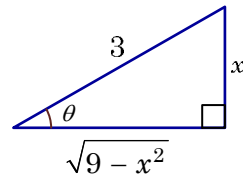
Utilizando la identidad trigonométrica

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= 1 - \operatorname{sen}^2 \theta \\ \int \sqrt{9 - x^2} dx &= 3 \int \sqrt{9(\cos^2 \theta)} \cos \theta d\theta \\ &= 3 \int 3 \cos \theta \cos \theta d\theta \\ &= 9 \int \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

La integral trigonométrica se calcula por la fórmula de reducción de potencias

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9 - x^2} dx &= 9 \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= 9 \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{9}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) + c \\ &= \frac{9}{2} \theta + \frac{9}{4} \operatorname{sen} 2\theta + c \\ &= \frac{9}{2} \theta + \frac{9}{4} (2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) + c \\ &= \frac{9}{2} \theta + \frac{9}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + c \end{aligned}$$

Ahora solo hace falta expresar la respuesta en términos de x . Para ello podemos utilizar algunas identidades y recurrir nuevamente al triángulo rectángulo, de donde se obtiene que



$$\operatorname{sen} \theta = \frac{x}{3}, \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right), \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

Efectuando las sustituciones

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9-x^2} \, dx &= \frac{9}{2} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{2} \left(\frac{x}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + c \\ &= \frac{9}{2} \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2} x \sqrt{9-x^2} + c \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Integración por sustitución trigonométrica completando cuadrados

Calcule la integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}} \, dx$$

Solución

Para calcular esta integral primero se debe completar cuadrados en la expresión dentro del radical y luego utilizar sustitución trigonométrica.

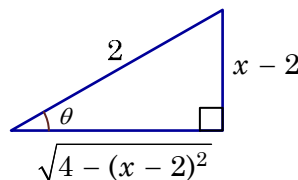
Completando cuadrados se tiene:

$$\begin{aligned} 4x - x^2 &= -(x^2 - 4x) \\ &= -(x^2 - 4x + 4) + 4 \\ &= -(x-2)^2 + 4 \\ &= 4 - (x-2)^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}} \, dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \, dx$$

Ahora por sustitución trigonométrica, se tiene una expresión de la forma $a^2 - u^2$ donde $a = 2$ y $u = x - 2$. El dos se coloca en la hipotenusa del triángulo y $x - 2$ en el cateto opuesto. El cateto adyacente se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{x-2}{2}$$

$$2 \operatorname{sen} \theta = x - 2$$

$$x = 2 \operatorname{sen} \theta + 2$$

Calculando el diferencial

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

En este punto del problema ya se puede sustituir x y dx para expresar la integral en términos de funciones trigonométricas como en el ejemplo 1.

Aquí ilustraremos otra forma de hacerlo. Del triángulo rectángulo se tiene que

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{4 - (x-2)^2}}{2}$$

$$2 \cos \theta = \sqrt{4 - (x-2)^2}$$

Es decir que podemos sustituir directamente $2 \cos \theta$, por la expresión en el denominador de la integral. Haciendo las sustituciones se obtiene

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - (x-2)^2}} dx &= \int \frac{(2 \operatorname{sen} \theta + 2)^2}{2 \cos \theta} 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int (4 \operatorname{sen}^2 \theta + 8 \operatorname{sen} \theta + 4) d\theta \\ &= 4 \int \operatorname{sen}^2 \theta + 8 \int \operatorname{sen} \theta d\theta + 4 \int d\theta \\ &= 4 \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta + 8 \int \operatorname{sen} \theta d\theta + 4 \int d\theta \\ &= 2 \int d\theta - 2 \int \cos 2\theta d\theta + 8 \int \operatorname{sen} \theta d\theta + 4 \int d\theta \\ \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - (x-2)^2}} dx &= 2\theta - 2 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta - 8 \cos \theta + 4\theta + c \\ &= 6\theta - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - 8 \cos \theta + c \end{aligned}$$

Del triángulo rectángulo se tiene que

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{x-2}{2} \quad \text{entonces} \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x-2}{2} \right), \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{4 - (x-2)^2}}{2}$$

Entonces

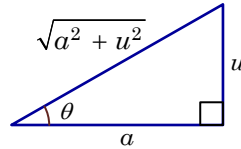
$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4 - (x-2)^2}} dx &= 6\theta - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - 8 \cos \theta + c \\ &= 6 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x-2}{2} \right) - 2 \left(\frac{x-2}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{4 - (x-2)^2}}{2} \right) - 8 \left(\frac{\sqrt{4 - (x-2)^2}}{2} \right) + c \\ &= 6 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x-2}{2} \right) - \frac{1}{2} (x-2) \sqrt{4 - (x-2)^2} - 4 \sqrt{4 - (x-2)^2} + c \\ &= 6 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x-2}{2} \right) - \frac{1}{2} x \sqrt{4 - (x-2)^2} + \sqrt{4 - (x-2)^2} - 4 \sqrt{4 - (x-2)^2} + c \\ &= 6 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x-2}{2} \right) - \frac{1}{2} x \sqrt{4 - (x-2)^2} - 3 \sqrt{4 - (x-2)^2} + c \\ &= 6 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x-2}{2} \right) - \frac{1}{2} x \sqrt{4x - x^2} - 3 \sqrt{4x - x^2} + c \end{aligned}$$

Caso 2

Para calcular una integral que contiene

$$a^2 + u^2$$

Se construye un triángulo rectángulo en donde a es la hipotenusa, u es el cateto opuesto y θ es el ángulo agudo. Al calcular la hipotenusa por el teorema de Pitágoras se obtiene $\sqrt{a^2 + u^2}$, como se muestra en la figura siguiente



Al relacionar el cateto opuesto con el cateto adyacente se obtiene

$$\tan \theta = \frac{u}{a}$$

Despejando u , la integral se puede resolver haciendo la sustitución

$$u = a \tan \theta$$

El diferencial du correspondiente es

$$du = a \sec^2 \theta d\theta$$

Una vez calculada la integral en términos del ángulo θ será necesario utilizar las siguientes expresiones para que la integral quede en términos de la variable inicial u

$$\tan \theta = \frac{u}{a}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right), \quad \sec \theta = \frac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}}$$

Ejemplo 3: Integración por sustitución trigonométrica

Calcule la integral

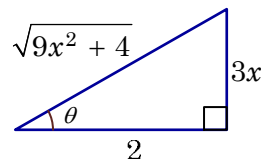
$$\int \frac{dx}{(9x^2 + 4)^2}$$

Solución

La integral puede expresarse como

$$\int \frac{dx}{[(3x)^2 + 4]^2}$$

La integral tiene una expresión de la forma $a^2 + u^2$ donde $a = 2$ y $u = 3x$. En este caso $3x$ se coloca en el cateto opuesto del triángulo y 2 en el cateto adyacente. La sustitución a utilizar es $u = a \tan \theta$. La hipotenusa se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\tan \theta = \frac{3x}{2}$$

$$2 \tan \theta = 3x$$

$$x = \frac{2}{3} \tan \theta$$

$$dx = \frac{2}{3} \sec^2 \theta d\theta$$

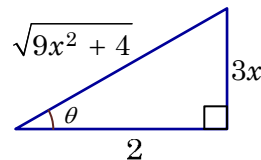
Sustituyendo x y dx y simplificando la integral resultante

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(9x^2 + 4)^2} &= \int \frac{\frac{2}{3} \sec^2 \theta d\theta}{\left(9\left(\frac{2}{3} \tan \theta\right)^2 + 4\right)^2} = \frac{2}{3} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\left(9\left(\frac{4}{9} \tan^2 \theta\right) + 4\right)^2} \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(4 \tan^2 \theta + 4)^2} = \frac{2}{3} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{16(\tan^2 \theta + 1)^2} \\ &= \frac{1}{24} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\sec^2 \theta)^2} = \frac{1}{24} \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^4 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{24} \int \frac{1}{\sec^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{24} \int \cos^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

La integral de potencias trigonométricas resultante se calcula fácilmente

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(9x^2 + 4)^2} &= \frac{1}{24} \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{24} \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{48} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + c \\ &= \frac{1}{48} \theta + \frac{1}{96} \sin 2\theta + c \\ &= \frac{1}{48} \theta + \frac{1}{96} (2 \sin \theta \cos \theta) + c \\ &= \frac{1}{48} \theta + \frac{1}{48} \sin \theta \cos \theta + c \end{aligned}$$

Del triángulo rectángulo se tiene que



$$\tan \theta = \frac{3x}{2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{3x}{2} \right)$$

$$\sin \theta = \frac{3x}{\sqrt{9x^2 + 4}}, \quad \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{9x^2 + 4}}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(9x^2 + 4)^2} &= \frac{1}{48} \theta + \frac{1}{48} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + c \\
 &= \frac{1}{48} \tan^{-1} \left(\frac{3x}{2} \right) + \frac{1}{48} \cdot \frac{3x}{\sqrt{9x^2 + 4}} \cdot \frac{2}{\sqrt{9x^2 + 4}} + c \\
 &= \frac{1}{48} \tan^{-1} \left(\frac{3x}{2} \right) + \frac{1}{48} \cdot \frac{6x}{9x^2 + 4} + c \\
 &= \frac{1}{48} \tan^{-1} \left(\frac{3x}{2} \right) + \frac{x}{8(9x^2 + 4)} + c
 \end{aligned}$$

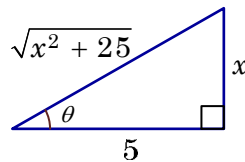
Ejemplo 4: Integración por sustitución trigonométrica

Calcule la integral

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}} dx$$

Solución

La integral tiene una expresión de la forma $a^2 + u^2$ donde $a = 5$ y $u = x$. En este caso x se coloca en el cateto opuesto del triángulo y 5 en el cateto adyacente. La sustitución a utilizar es $u = a \tan \theta$. La hipotenusa se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\begin{aligned}
 \tan \theta &= \frac{x}{5} \\
 x &= 5 \tan \theta \\
 dx &= 5 \sec^2 \theta d\theta
 \end{aligned}$$

Observe que

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{5}, \text{ entonces } \sqrt{x^2 + 25} = 5 \sec \theta$$

Sustituyendo x , $\sqrt{x^2 + 25}$ y dx se tiene

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}} dx &= \int \frac{(5 \tan \theta)^3 (5 \sec^2 \theta d\theta)}{5 \sec \theta} \\
 &= 125 \int \frac{\tan^3 \theta \sec^2 \theta}{\sec \theta} d\theta \\
 &= 125 \int \tan^3 \theta \sec \theta d\theta
 \end{aligned}$$

La integral de potencias trigonométricas resultante se calcula haciendo la sustitución

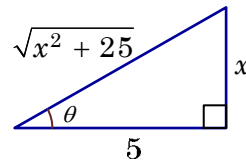
$$\begin{aligned}
 u &= \sec \theta \\
 du &= \sec \theta \tan \theta d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}} dx &= 125 \int \tan^3 \theta \sec \theta d\theta \\
 &= 125 \int \tan^2 \theta \tan \theta \sec \theta d\theta \\
 &= 125 \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta \tan \theta d\theta \\
 &= 125 \int (u^2 - 1) du \\
 \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}} dx &= 125 \int (u^2 - 1) du \\
 &= 125 \left(\frac{1}{3} u^3 - u \right) + c
 \end{aligned}$$

Expresando la respuesta en términos de funciones trigonométricas con $u = \sec \theta$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}} dx = 125 \left(\frac{1}{3} \sec^3 \theta - \sec \theta \right) + c$$

Finalmente se debe expresar la repuesta en términos de x , para ello nos apoyamos nuevamente en el triángulo rectángulo



$$\sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{5}$$

Entonces

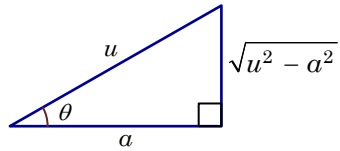
$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 25}} dx &= 125 \left(\frac{1}{3} \sec^3 \theta - \sec \theta \right) + c \\
 &= \frac{125}{3} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 25}}{5} \right)^3 - 125 \left(\frac{\sqrt{x^2 + 25}}{5} \right) + c \\
 &= \frac{1}{3} (x^2 + 25)^{3/2} - 25 \sqrt{x^2 + 25} + c
 \end{aligned}$$

Caso 3

Para calcular una integral que contiene

$$u^2 - a^2$$

Se construye un triángulo rectángulo en donde u es la hipotenusa, a es el cateto opuesto y θ es el ángulo agudo. Al calcular el cateto opuesto por el teorema de Pitágoras se obtiene $\sqrt{u^2 - a^2}$, como se muestra en la figura siguiente



Al relacionar el cateto adyacente con la hipotenusa

$$\sec \theta = \frac{u}{a}$$

Despejando u , la integral se puede resolver haciendo la sustitución

$$u = a \sec \theta$$

El diferencial du correspondiente es

$$du = a \sec \theta \tan \theta d\theta$$

Una vez calculada la integral en términos del ángulo θ será necesario utilizar las siguientes expresiones para que la integral quede en términos de la variable inicial u

$$\sec \theta = \frac{u}{a}, \quad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right), \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}$$

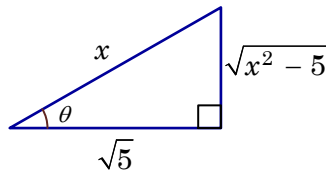
Ejemplo 5: Integración por sustitución trigonométrica

Calcule la integral

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x^2} dx$$

Solución

La integral tiene una expresión de la forma $u^2 - a^2$ donde $a = \sqrt{5}$ y $u = x$. En este caso x se coloca en la hipotenusa $\sqrt{5}$ en el cateto adyacente. La sustitución a utilizar es $u = a \sec \theta$. El cateto opuesto se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\sec \theta = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

$$x = \sqrt{5} \sec \theta$$

$$dx = \sqrt{5} \sec \theta \tan \theta d\theta$$

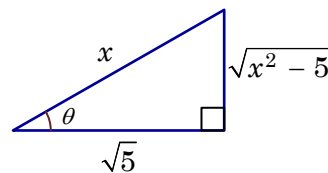
Al sustituir x y dx para obtener una integral con funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x^2} dx &= \int \frac{\sqrt{(\sqrt{5} \sec \theta)^2 - 5}}{(\sqrt{5} \sec \theta)^2} \sqrt{5} \sec \theta \tan \theta d\theta \\
 &= \sqrt{5} \int \frac{\sqrt{5 \sec^2 \theta - 5}}{5 \sec^2 \theta} \sec \theta \tan \theta d\theta \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{\sqrt{5(\sec^2 \theta - 1)}}{\sec \theta} \tan \theta d\theta \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{\sqrt{5 \tan^2 \theta}}{\sec \theta} \tan \theta d\theta \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{\sqrt{5} \tan \theta}{\sec \theta} \tan \theta d\theta \\
 &= \int \frac{\tan^2 \theta}{\sec \theta} d\theta
 \end{aligned}$$

La integral de potencias trigonométricas resultante se calcula utilizando la identidad trigonométrica

$$\begin{aligned}
 \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta - 1 \\
 \int \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x^2} dx &= \int \frac{\tan^2 \theta}{\sec \theta} d\theta \\
 &= \int \frac{\sec^2 \theta - 1}{\sec \theta} d\theta \\
 &= \int \sec \theta d\theta - \int \frac{1}{\sec \theta} d\theta \\
 &= \int \sec \theta d\theta - \int \cos \theta d\theta \\
 &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| - \sin \theta + c
 \end{aligned}$$

Finalmente se debe expresar la respuesta en términos de x , para ello nos apoyamos nuevamente en el triángulo rectángulo



$$\sec \theta = \frac{x}{\sqrt{5}}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x^2} dx &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| - \sin \theta + c \\
 &= \ln \left| \frac{\sqrt{5}}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{\sqrt{5}} \right| - \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x} + c
 \end{aligned}$$

Ejemplo 6: Integración por sustitución trigonométrica

Calcule la integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}} dx$$

Solución

Como la expresión dentro del radical tiene un polinomio cuadrático, lo primero que hay que hacer es completar el cuadrado

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x - 8 &= 4(x^2 + x) - 8 \\ &= 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 8 - 1 \\ &= 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 9 \end{aligned}$$

Entonces la integral inicial puede expresarse como

$$\int \frac{x}{\sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 9}} dx$$

Al hacer una sustitución inicial

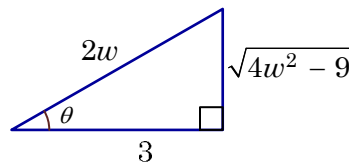
$$w = x + \frac{1}{2}$$

$$dw = dx$$

La integral queda expresada en términos de w como

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}} dx &= \int \frac{w - \frac{1}{2}}{\sqrt{4w^2 - 9}} dw \\ &= \int \frac{w - \frac{1}{2}}{\sqrt{(2w)^2 - 9}} dw \end{aligned}$$

La integral tiene una expresión de la forma $u^2 - a^2$ donde $a = 3$ y $u = 2w$. En este caso $2w$ se coloca en la hipotenusa 3 en el cateto adyacente. La sustitución a utilizar es $u = a \sec \theta$. El cateto opuesto se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\sec \theta = \frac{2w}{3}$$

$$3 \sec \theta = 2w$$

$$dw = \frac{3}{2} \sec \theta \tan \theta d\theta$$

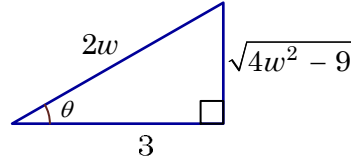
Al sustituir w y dw para obtener una integral con funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}} dx &= \int \frac{w - \frac{1}{2}}{\sqrt{(2w)^2 - 9}} dw = \int \frac{\frac{3}{2}\sec\theta - \frac{1}{2}}{\sqrt{(3\sec\theta)^2 - 9}} \frac{3}{2} \sec\theta \tan\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{3\sec\theta - 1}{\sqrt{9\sec^2\theta - 9}} \frac{3}{2} \sec\theta \tan\theta d\theta = \frac{3}{4} \int \frac{3\sec\theta - 1}{\sqrt{9(\sec^2\theta - 1)}} \sec\theta \tan\theta d\theta \\
&= \frac{3}{4} \int \frac{3\sec\theta - 1}{3\sqrt{\tan^2\theta - 1}} \sec\theta \tan\theta d\theta = \frac{1}{4} \int \frac{3\sec\theta - 1}{\tan\theta} \sec\theta \tan\theta d\theta \\
&= \frac{1}{4} \int (3\sec\theta - 1) \sec\theta d\theta = \frac{3}{4} \int \sec^2\theta d\theta - \frac{1}{4} \int \sec\theta d\theta
\end{aligned}$$

Las dos integrales resultantes se calculan utilizando las fórmulas de integración correspondientes

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}} dx &= \frac{3}{4} \int \sec^2\theta d\theta - \frac{1}{4} \int \sec\theta d\theta \\
&= \frac{3}{4} \tan\theta - \frac{1}{4} \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c
\end{aligned}$$

Utilizando el triángulo rectángulo para obtener las funciones trigonométricas en términos de w



$$\tan\theta = \frac{\sqrt{4w^2 - 9}}{3}, \quad \sec\theta = \frac{2w}{3}$$

La integral queda expresada en términos de w como

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}} dx &= \frac{3}{4} \frac{\sqrt{4w^2 - 9}}{3} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2w}{3} + \frac{\sqrt{4w^2 - 9}}{3} \right| + c \\
&= \frac{\sqrt{4w^2 - 9}}{4} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2w + \sqrt{4w^2 - 9}}{3} \right| + c
\end{aligned}$$

Finalmente se debe expresar la repuesta en términos de x . Como $w = x + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}} dx &= \frac{\sqrt{4w^2 - 9}}{4} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2w + \sqrt{4w^2 - 9}}{3} \right| + c \\
&= \frac{\sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 9}}{4} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 9}}{3} \right| + c \\
&= \frac{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}}{4} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x - 8}}{3} \right| + c
\end{aligned}$$

Ejercicios sobre sustitución trigonométrica

En los ejercicios siguientes, calcule la integral que involucra funciones trigonométricas

1. $\int \frac{\sqrt{16+x^2}}{x^2} dx$

2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} dx$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

4. $\int x\sqrt{x^2+5} dx$

5. $\int x^3\sqrt{4-x^2} dx$

6. $\int \frac{dx}{(x^2-9)^{3/2}}$

7. $\int \sqrt{x^2+5} dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{36-x^2}}$

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$

11. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$

12. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^{5/2}}$

13. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4} dx$

14. $\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}} dx$

15. $\int \sqrt{6x-x^2} dx$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}$

17. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{9+x^2}}$

18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{16+x^4}}$

19. $\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x} dx$

20. $\int \frac{e^{-t}}{(9e^{-2t}+4)^{3/2}} dt$

21. $\int \frac{e^t}{(e^{2t}+8e^t+7)^{3/2}} dt$

22. $\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}}$

23. $\int \frac{x^3}{\sqrt{16+x^2}} dx$

24. $\int \frac{x^3}{\sqrt{25+x^2}} dx$

25. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+5}} dx$

26. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+6x-7}} dx$

27. $\int \frac{x}{(x^2+8x+25)^{3/2}} dx$

28. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-10x+21}} dx$

29. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+8x+7}} dx$

30. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$

32. $\int \frac{\ln^3 x dx}{x\sqrt{\ln^2 x-4}}$

33. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{16-x^2}}$

34. $\int_1^3 \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}}$

35. $\int_4^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

36. $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2} dx$

Ejercicios del portal UEDI**37.**

La sustitución correcta utilizando sustitución trigonométrica en la siguiente integral es

$$\int \frac{x}{\sqrt{7x - x^2}} dx$$

- ☐ a. $x = (7 + 7 \sec \theta)/4$
☐ b. $x = (7 - 7 \sec \theta)/2$
☐ c. $x = (7 + 7 \sec \theta)/2$
☐ d. $x = (7 + 7 \sec \theta)/4$
☐ e. Ninguna de las otras opciones es correcta.

38.

Dadas las integrales NOTA (En cada respuesta escriba la literal correcta)

- a. $\int \frac{\sqrt{16 - e^{3t}}}{e^t} dt$
 b. $\int \csc t \sqrt{16 + \sec^2 t} dt$
 c. $\int e^{2t} \sqrt[3]{e^{2t} + 16} dt$
 d. *Ninguna opción es correcta*
 e. $\int \cot t \sqrt{16 - \sec^2 t} dt$

¿Cuál resolvería por sustituciones trigonométricas?

¿Qué sustitución trigonométrica elegiría?

- f. $u = e^t$ g. $e^t = 4 \tan \theta$ h. $\sec t = 4 \tan \theta$ i. $\sec t = 4 \sec \theta$
 j. *Ninguna opción es correcta*

39.

Obtenga la solución de la integral

$$\int \frac{\ln^3 w}{w \sqrt{\ln^2 w - 4}} dw$$

Seleccione una:

- ☐ a. Ninguna de las otras opciones es correcta.
☐ b. $\frac{(\ln^2 w - 4)^{5/2}}{3} - 4(\ln^2 w - 4)^{-1/2} + C$
☐ c. $\frac{(\ln^2 w - 4)^{5/2}}{3} - 4(\ln^2 w - 4)^{1/2} + C$
☐ d. $\frac{(\ln^2 w - 4)^{3/2}}{3} + 4(\ln^2 w - 4)^{1/2} + C$
☐ e. $\frac{(\ln^2 w - 4)^{5/2}}{3} + 4(\ln^2 w - 4)^{3/2} + C$

