

2.3 Derivadas de funciones trigonométricas

INTRODUCCIÓN

En esta sección se estudian las derivadas de las seis funciones trigonométricas. Para introducir las fórmulas de estas derivadas es necesario introducir primero el cálculo de límites que involucran funciones trigonométricas.

OBJETIVOS

Al finalizar el estudio y desarrollar las actividades de esta unidad el estudiante estará en capacidad de

- Calcular límites que involucran funciones trigonométricas.
- Calcular la derivada de funciones que contienen funciones trigonométricas.
- Resolver problemas que involucran rectas tangentes y perpendiculares a funciones trigonométricas.
- Resolver problemas en donde la derivada es interpretada como una razón de cambio.

Límites trigonométricos

Los límites que involucran funciones trigonométricas se calculan usando las mismas propiedades que se usan para calcular límites de funciones algebraicas, con la diferencia que, adicionalmente se pueden utilizar dos propiedades adicionales. La demostración de estas propiedades requiere del uso de otros teoremas que por cuestión de tiempo no se estudian en este documento. El estudiante puede consultar estas demostraciones en cualquier libro formal de cálculo.

Propiedades de límites trigonométricos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de las propiedades anteriores para el cálculo de límites trigonométricos.

Ejemplo 1: Límite trigonométrico con tangentes

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{5x}$$

Solución

Como la función es una expresión racional, debemos calcular el límite del numerador y del denominador

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\tan 3x) = \tan(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (5x) = 0$$

Como el límite del numerador y el denominador tienden a 0, el límite que se va a calcular tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo que se deben realizar operaciones algebraicas y utilizar algunas identidades trigonométricas.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen 3x}{5x \cos 3x}$$

Como el ángulo de la función trigonométrica es múltiple, es recomendable hacer un cambio de variable en el límite. Haciendo

$$u = 3x$$

Se tiene que $x = \frac{u}{3}$, además cuando x tiende a 0, u también tiende a 0

Entonces el límite puede expresarse en términos de la variable u de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen 3x}{5x \cos 3x} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sen u}{5\left(\frac{u}{3}\right) \cos u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{3 \sen u}{5u \cos u} \end{aligned}$$

Finalmente se puede expresar el límite como el producto de dos límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{5x} = \frac{3}{5} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sen u}{u} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\cos u}$$

Ahora se puede utilizar el teorema $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen x}{x} = 1$ y calcular el segundo límite por evaluación, obteniéndose que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{5x} &= \frac{3}{5} (1) \cdot \frac{1}{\cos(0)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{5} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{5x} &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Límite trigonométrico con senos y cosecantes

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sen 3x \csc 5x)$$

Solución

En este problema tenemos el límite de un producto. Al evaluar el límite de cada factor se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sen 3x) = \sen(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\csc 5x) = \csc(0) \quad \text{no está definida}$$

El segundo límite es un límite infinito, el producto de los dos límites tiene la forma $0 \cdot \infty$

Que es otra forma indeterminada y el límite debe ser calculado efectuando algunas y sustituciones trigonométricas y operaciones algebraicas. El límite puede expresarse como

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x \csc 5x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x) \frac{1}{\sin 5x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}\end{aligned}$$

El límite obtenido tiene forma indeterminada 0/0 y se puede calcular multiplicando el numerador por $\frac{3x}{3x}$ y el denominador por $\frac{5x}{5x}$ y luego simplificando

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x \csc 5x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \frac{3x}{3x}}{\sin 5x \cdot \frac{5x}{5x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x} \frac{3x}{\sin 5x} \\ &= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}\end{aligned}$$

El límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre que el límite del denominador no sea igual a 0, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x \csc 5x) = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}}$$

Siendo formal se debiera hacer una sustitución para calcular los límites del numerador y del denominador, como se hizo en el ejemplo 1, pero es claro que ambos límites tienden a 1 y para ahorrar un poco de tiempo y espacio omitimos la sustitución

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x \csc 5x) &= \frac{3(1)}{5(1)} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

Ejemplo 3: Límite trigonométrico que no tiende a cero

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\sin x}$$

Solución

Observe que x tiende a π . En los dos teoremas estudiados en esta sección x tiende a 0, es razonable pensar que lo más apropiado es hacer una sustitución de tal forma que la nueva variable tienda a 0. Haciendo

$$u = x - \pi$$

Se obtiene que cuando x tiende a π u tiende a cero, además $x = u + \pi$. Expresando el límite en términos de u

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\operatorname{sen} x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{sen}(u + \pi)}$$

Utilizando la identidad para el seno de una suma de ángulos y simplificando

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{sen} u \cos \pi + \cos u \operatorname{sen} \pi} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{sen} u \cdot (-1) + \cos u \cdot (0)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{-\operatorname{sen} u} \end{aligned}$$

Trasladando u al denominador y evaluando el límite

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{\operatorname{sen} u}{u}} \\ &= \frac{\lim_{u \rightarrow 0} 1}{\lim_{u \rightarrow 0} \left(-\frac{\operatorname{sen} u}{u} \right)} \\ &= \frac{1}{-1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Ejemplo 4: Límite trigonométrico infinito

Calcule el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

Solución

Como la función es una expresión racional, debemos calcular el límite del numerador y del denominador

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 1 - \cos(0) = 1 - 1 = 0$$

Como el límite del numerador y el denominador tienden a 0, el límite que se va a calcular tiene forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo que se deben realizar operaciones algebraicas y utilizar algunas identidades trigonométricas.

Racionalizando el denominador se tiene.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x(1 + \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Cuando evaluamos este último límite se obtiene que el numerador tiende a 2, mientras que el denominador se aproxima a 0, por lo que el límite es del tipo infinito. Evaluando la expresión en un número cercano a cero por la izquierda, teniendo el cuidado de colocar la calculadora en el modo de radianes

$$\frac{1 + \cos(-0.001)}{\operatorname{sen}(-0.001)} = -2000.0$$

El resultado anterior nos indica que la función está tomando valores negativos muy grandes cuando x se aproxima a cero por la izquierda, es decir que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = -\infty$$

Derivadas de las funciones trigonométricas

Las fórmulas para la derivada de la función seno y de la función coseno se obtienen a partir de la definición de derivada y de los dos límites trigonométricos utilizados de base para los ejemplos anteriores

Las fórmulas de las otras cuatro funciones se pueden obtener utilizando las identidades fundamentales y las fórmulas para derivar productos y cocientes.

Las fórmulas para derivar las 6 funciones trigonométricas son las siguientes

$D_x[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$D_x[\operatorname{sen} u] = \cos u \cdot D_x u$
$D_x[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$D_x[\cos u] = -\operatorname{sen} u \cdot D_x u$
$D_x[\tan x] = \sec^2 x$	$D_x[\tan u] = \sec^2 u \cdot D_x u$
$D_x[\cot x] = -\operatorname{csc}^2 x$	$D_x[\cot u] = -\operatorname{csc}^2 u \cdot D_x u$
$D_x[\sec x] = \sec x \tan x$	$D_x[\sec u] = \sec u \tan u \cdot D_x u$
$D_x[\csc x] = -\operatorname{csc} x \cot x$	$D_x[\csc u] = -\operatorname{csc} u \cot u \cdot D_x u$

Ejemplo 5: Derivada de la función seno

Utilice la definición de derivada para deducir la fórmula de la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$

Solución

La definición de derivada establece que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Al aplicar la definición a la función seno se tiene

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h}$$

Utilizando la identidad para una suma de ángulos y ordenando las expresiones

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x(1 - \cos h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} h \cos x}{h} - \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos h)}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \cos x - \frac{1 - \cos h}{h} \cdot \operatorname{sen} x \right)
 \end{aligned}$$

Ahora se puede evaluar el límite utilizando los límites ya conocidos

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} &= 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0 \\
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \cos x \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos h}{h} \cdot \operatorname{sen} x \right) \\
 &= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} \\
 &= \cos x \cdot (1) - \operatorname{sen} x \cdot (0) \\
 &= \cos x
 \end{aligned}$$

Concluyendo que la derivada de la función seno es

$$D_x [\operatorname{sen} x] = \cos x$$

Ejemplo 6: Derivada de la función tangente

Utilice identidades trigonométricas y la derivada de un cociente para deducir la fórmula de la derivada de la función $\tan x$

Solución

Usando identidades la función tangente se puede expresar como

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Ahora se puede utilizar la derivada de un cociente, dando por hecho que ya se saben las derivadas de la función seno y coseno.

$$\begin{aligned}
 D_x(\tan x) &= D_x \left[\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right] \\
 &= \frac{\cos x \cdot D_x(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \cdot D_x(\cos x)}{(\cos x)^2} \\
 &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} \\
 &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)^2}
 \end{aligned}$$

Utilizando las identidades trigonométricas $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$D_x(\tan x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$= \sec^2 x$$

Se concluye que

$$D_x[\tan x] = \sec^2 x$$

Ejemplo 7: Derivada de un cociente con funciones trigonométricas

Calcule la derivada de la función

$$G(x) = \frac{\sec^2 x - 1}{\cos^2 x + 1}$$

Solución

Utilizando la regla del cociente se tiene

$$\begin{aligned} G'(x) &= D_x \left[\frac{\sec^2 x - 1}{\cos^2 x + 1} \right] \\ &= \frac{(\cos^2 x + 1)D_x(\sec^2 x - 1) - (\sec^2 x - 1)D_x(\cos^2 x + 1)}{(\cos^2 x + 1)^2} \\ &= \frac{(\cos^2 x + 1)(2\sec x \cdot D_x(\sec x) - 0) - (\sec^2 x - 1)(2\cos x \cdot D_x(\cos x) + 0)}{(\cos^2 x + 1)^2} \\ &= \frac{(\cos^2 x + 1)(2\sec x \cdot \cos x) - (\sec^2 x - 1)(2\cos x \cdot (-\sin x))}{(\cos^2 x + 1)^2} \end{aligned}$$

El cálculo de la derivada ya se ha completado y únicamente falta simplificar la respuesta. Como siempre se recomienda ordenar las expresiones antes de iniciar con la simplificación

$$G'(x) = \frac{2(\cos^2 x + 1)(\sec x \cdot \cos x) + 2(\sec^2 x - 1)(\sec x \cdot \cos x)}{(\cos^2 x + 1)^2}$$

Tomando factor común $2\sec x \cos x$

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{2\sec x \cdot \cos x [\cos^2 x + 1 + \sec^2 x - 1]}{(\cos^2 x + 1)^2} \\ &= \frac{2(\sec x \cos x)(\cos^2 x + \sec^2 x)}{(\cos^2 x + 1)^2} \\ &= \frac{2\sec x \cos x}{(\cos^2 x + 1)^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 8: Derivada de funciones trigonométricas y regla de la cadena

Calcule la derivada de la función

$$f(x) = \frac{(1 - \tan 4x)^5}{(1 + \cot 4x)^3}$$

Solución

Utilizando la regla del cociente se tiene

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= D_x \left[\frac{(1 - \tan 4x)^5}{(1 + \cot 4x)^3} \right] \\
 &= \frac{(1 + \cot 4x)^3 D_x (1 - \tan 4x)^5 - (1 - \tan 4x)^5 D_x (1 + \cot 4x)^3}{[(1 + \cot 4x)^3]^2} \\
 &= \frac{(1 + \cot 4x)^3 5(1 - \tan 4x)^4 D_x (1 - \tan 4x) - (1 - \tan 4x)^5 3(1 + \cot 4x)^2 D_x (1 + \cot 4x)}{(1 + \cot 4x)^6} \\
 &= \frac{5(1 + \cot 4x)^3 (1 - \tan 4x)^4 (\sec^2 4x \cdot 4) - 3(1 - \tan 4x)^5 (1 + \cot 4x)^2 (-\csc^2 4x \cdot 4)}{(1 + \cot 4x)^6} \\
 &= \frac{20(1 + \cot 4x)^3 (1 - \tan 4x)^4 (\sec^2 4x) + 12(1 - \tan 4x)^5 (1 + \cot 4x)^2 (\csc^2 4x)}{(1 + \cot 4x)^6}
 \end{aligned}$$

El cálculo de la derivada ya se ha completado y únicamente falta simplificar la respuesta. Tomando factor común en el numerador $4(1 + \cot 4x)^2(1 - \tan 4x)^4$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{4(1 + \cot 4x)^2 (1 - \tan 4x)^4 [5(1 + \cot 4x)(\sec^2 4x) + 3(1 - \tan 4x)(\csc^2 4x)]}{(1 + \cot 4x)^6} \\
 &= \frac{4(1 - \tan 4x)^4 [5(1 + \cot 4x)(\sec^2 4x) + 3(1 - \tan 4x)(\csc^2 4x)]}{(1 + \cot 4x)^4}
 \end{aligned}$$

Al desarrollar los productos dentro de los corchetes no parece que se pueda obtener una respuesta más sencilla, por lo que la última parece una buena respuesta.

Ejemplo 9: Derivada de funciones trigonométricas y regla de la cadena

Calcule la derivada de la función

$$f(x) = \tan(\sec \sqrt{\cos 3x - \sin 3x})$$

Solución

Al calcular la derivada de esta función se debe tener cuidado ya que es una función que está compuesta varias veces y por lo tanto hay que utilizar varias veces la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= D_x [\tan(\sec \sqrt{\cos 3x - \sin 3x})] \\
 &= \sec^2(\sec \sqrt{\cos 3x - \sin 3x}) D_x [\sec \sqrt{\cos 3x - \sin 3x}] \\
 &= \sec^2(\sec \sqrt{\cos 3x - \sin 3x}) \cdot (\sec \sqrt{\cos 3x - \sin 3x} \cdot \tan \sqrt{\cos 3x - \sin 3x}) \\
 &\quad \cdot D_x [\sqrt{\cos 3x - \sin 3x}]
 \end{aligned}$$

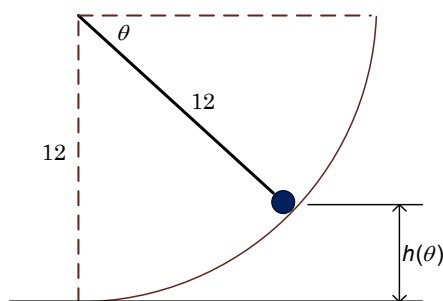
Solamente hace falta calcular la derivada de la raíz en el último corchete

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sec^2(\sec\sqrt{\cos 3x - \sen 3x}) \cdot (\sec\sqrt{\cos 3x - \sen 3x} \cdot \tan\sqrt{\cos 3x - \sen 3x}) \\ &\quad \cdot \frac{1}{2}(\cos 3x - \sen 3x)^{-1/2} D_x[\cos 3x - \sen 3x] \\ &= \sec^2(\sec\sqrt{\cos 3x - \sen 3x}) \cdot (\sec\sqrt{\cos 3x - \sen 3x} \cdot \tan\sqrt{\cos 3x - \sen 3x}) \\ &\quad \cdot \frac{1}{2}(\cos 3x - \sen 3x)^{-1/2} (-3\sen 3x - 3\cos 3x) \end{aligned}$$

El cálculo de la derivada ya se ha completado y únicamente falta simplificar la respuesta. El propósito de estos ejercicios es el uso de la regla de la cadena y no el de la manipulación algebraica, que se hace prácticamente imposible.

Ejemplo 10: Razones de cambio con funciones trigonométricas

Un péndulo de 12 pulgadas de longitud oscila de modo que θ es la medida en radianes del ángulo formado por el péndulo y una recta horizontal, como se muestra en la figura. Si $h(\theta)$ es la altura vertical del extremo del péndulo por arriba de su posición más baja. Determine la razón instantánea de cambio de $h(\theta)$ con respecto a θ cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$.



Solución

Al observar la gráfica y utilizar razones trigonométricas obtenemos

$$\sen \theta = \frac{12 - h(\theta)}{12}$$

Despejando $h(\theta)$

$$h(\theta) = 12 - 12\sen \theta$$

Ahora podemos obtener la razón de cambio de h con respecto a θ

$$D_\theta[h(\theta)] = D_\theta[12 - 12\sen \theta] = -12\cos \theta,$$

Finalmente evaluamos la razón de cambio para $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} D_\theta[h(\theta)]_{\theta=\frac{\pi}{3}} &= -12\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -12(0.5) \\ &= -6 \end{aligned}$$

La altura disminuye a una razón de 6 pulgadas por radian cuando $\theta = \frac{\pi}{3}$

Ejercicios sobre derivadas de funciones trigonométricas

En los ejercicios 1 a 30 utilice las propiedades de los límites para calcular los límites trigonométricos:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc 3x}{\cot x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{5x}$

4. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

5. $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\operatorname{sen} \theta}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos x}{x}$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^4 2x}{4x^4}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3x}{2\operatorname{sen} x}$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x}$

13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 + x - 2}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(\tan 2x)^3}$

15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{sen}(x-3)}{x^2 - 2x - 3}$

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{5x}$

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{sen} 4x + 1 - \cos x}{x}$

18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\csc\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - \csc\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{5x^2 - 3x}$

20. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$

21. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cot x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}|x|}{x}$

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(3x)}{\operatorname{sen}(6x)}$

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x + \tan(ax)}$

25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\tan x}{x \sec x}$

26. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos 2x}$

27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen} 3x}$

28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x}$

29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 7x}$

30. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8} + h\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} + h\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{h}$

En los ejercicios 31 a 20 encuentre la derivada de la función utilizando las reglas de derivadas de las funciones trigonométricas

31. $f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{x \cos x}$

32. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x^2)$

33. $f(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x - 1}{\cos^2 x + 1}$

34. $g(t) = \frac{t^3 \cos t}{1 + \cos t}$

$$35. \quad y = \frac{x^4 - 5x^2}{\sin x}$$

$$37. \quad g(t) = \frac{t^3 \cos t}{1 + \cos t}$$

$$39. \quad f(t) = \sin^2 3t \sqrt{\cos 2t}$$

$$41. \quad f(x) = x \tan^2(\sin 3x)$$

$$43. \quad y = \left(\sqrt[3]{x^2 + 2} \right) (\tan(\sin x))$$

$$45. \quad g(x) = (\tan(x^2 - 5x))^5$$

$$47. \quad f(x) = \tan^2(\sqrt{2x+1})$$

$$49. \quad y = \sqrt{\frac{\cos x - 1}{\sin x}}$$

$$36. \quad f(x) = \sqrt{1 + 3 \cot 3x}$$

$$38. \quad y = \sin(\cos(\tan^{-1} x))$$

$$40. \quad y = \sin(\cos(\tan x))$$

$$42. \quad y = (1 - \cos^2 \pi x)^5$$

$$44. \quad y = \sin\left(\tan \sqrt{1 + x^3}\right)$$

$$46. \quad y = \sqrt{\cos(\tan(\sin(x)))}$$

$$48. \quad y = \sin(\tan(\sec 2x))$$

$$50. \quad f(t) = \sqrt{2t} \cdot \cot \sqrt{\frac{1}{2t}}$$

51. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = \cos x$ en $x = \frac{\pi}{6}$

52. Encuentre la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $y = \sec x$ en $x = \frac{\pi}{4}$

53. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x \sin x$ en $x = \frac{\pi}{2}$

54. Encuentre los valores de x en donde la gráfica de $y = x - 2 \cos x$ tiene una recta tangente horizontal.

55. Encuentre los valores de x en donde la gráfica de $y = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$ tiene una recta tangente horizontal.

56. Una escalera de 5 metros de largo está apoyada sobre una pared vertical. La pared forma un ángulo de 90° con el suelo. Si y es la distancia entre la parte superior de la escalera y el suelo y θ es el ángulo formado entre la escalera y el suelo, encuentre la razón de cambio de y con respecto a θ , cuando la medida del ángulo es $\theta = \frac{\pi}{6}$.

57. Un cuerpo de peso W libras es arrastrado a lo largo de una superficie horizontal a una velocidad constante por una fuerza de magnitud F libras con una inclinación de θ radianes con respecto a la horizontal, entonces la fuerza F está dada por

$$f(\theta) = \frac{kW}{k \sin \theta + \cos \theta}$$

Donde k es una constante. Determine la razón de cambio de F con respecto a θ , cuando $\theta = \frac{\pi}{6}$

58. Un objeto se mueve en cierta trayectoria, de tal forma que su posición en cualquier instante está dada por

$$s(t) = 2 \sin t - 3 \cos t$$

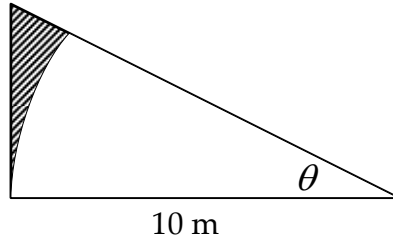
a. Encuentre la velocidad del objeto para cualquier instante t .

b. En que instante el objeto está en reposo.

59. Un péndulo de 10 cm de longitud ha oscilado de modo que θ es la medida en radianes del ángulo formado por el péndulo y una recta vertical. Si $h(\theta)$ es la altura vertical del extremo del péndulo por

arriba de su posición más baja. Determine la razón instantánea de cambio de $h(\theta)$ con respecto a θ , cuando $\theta = \frac{\pi}{6}$.

60. Considere la región sombreada que queda fuera del sector circular de radio 10 metros y dentro del triángulo rectángulo, como se muestra en la figura.



- a. Exprese el área de la región sombreada como una función del ángulo, $A = f(\theta)$. Determine el dominio de la función.
- b. Calcule el límite de A cuando θ tiende a $\pi / 2$ por la izquierda.