3.3 Fuerza hidrostática

OBJETIVOS

- Encontrar la fuerza ejercida sobre una compuerta plana debido a la presión ejercida por el agua sobre ella

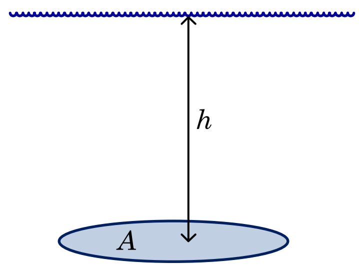
La presión ejercida por un fluido sobre un objeto puntual que se encuentra sumergido a una profundidad h, está dada por

$$\begin{aligned} P &= (\text{peso por unidad de volumen}) \cdot (\text{profundidad}) \\ &= \rho h \end{aligned}$$

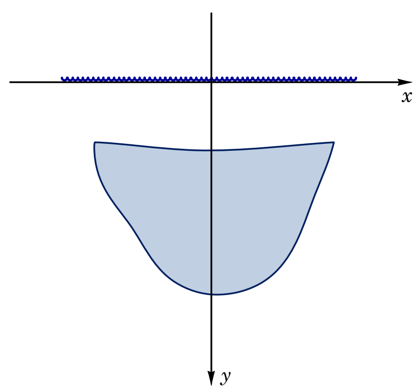
Donde ρ denota el peso específico del líquido y h representa la profundidad.

Ahora bien, si una placa plana de área A se sumerge a una profundidad h, la fuerza ejercida por el fluido sobre la placa, está dada por

$$F = pA = \rho h A$$

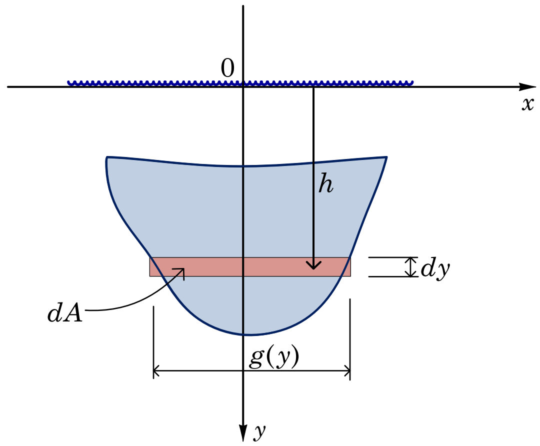


Nos interesa encontrar la fuerza ejercida por un fluido, sobre una placa plana que se encuentra sumergida en forma vertical en el fluido. Como se muestra en la figura siguiente



Para calcular la fuerza ejercida por el fluido sobre la compuerta, es necesario suponer que la compuerta está formada por una cantidad infinita de diferenciales de área, de tal forma que cada diferencial de área esta sumergido a una profundidad h.

Al colocar un sistema de coordenadas, con el eje y positivo hacia abajo y el eje x que coincida con la superficie del líquido, como se muestra en la figura siguiente.



En estas condiciones, la fuerza ejercida por el fluido, sobre el diferencial de áea es

$$dF = \rho \cdot h \cdot dA$$

La fuerza total ejercida sobre la compuerta está dada por la suma de todos los diferenciales de fuerza, es decir

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} \rho h dA$$

$$F = \int_a^b \rho h dA$$

Como la variable de integración es y es necesario expresar la altura h y el diferencial de área dA en términos de la variable de integración.

Si la superficie del fluido coincide con el eje x, se tiene que

$$h = y$$

Por otro lado, la longitud del diferencial de área b , se debe expresar como una función de la variable de integración y, como se indica en la figura. De tal forma que el diferencial de área será

$$dA = g(y)\,dy$$

Al hacer las suposiciones anteriores, se obtiene que la fuerza ejercida por el fluido sobre la compuerta es

$$F = \int_a^b \rho h dA = \rho \int_a^b y\, g(y)\, dy$$

Los límites de integración están dados por la profundidad de la parte superior de la compuerta y la profundidad de la parte inferior de la compuerta ya que el origen está en la superficie del agua.

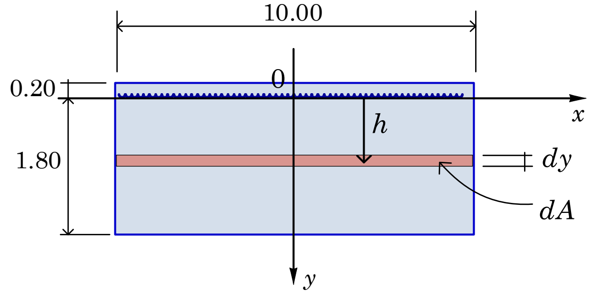
Debe estar claro que al variar la posición de los ejes coordenados las suposiciones que se han hecho no funcionan y será necesario obtener las expresiones correspondientes de la posición de los ejes coordenados.

Ejemplo 1: Fuerza sobre una compuerta

La pared vertical de una piscina tiene forma rectangular de 10 metros de ancho en la parte superior y 2 metros de profundidad. Si el nivel del agua se encuentra 20 centímetros por debajo de la parte superior de la pared. Determine la fuerza debida a la presión del agua ejercida sobre la pared.

Solución

La siguiente figura muestra la compuerta situada en un sistema de coordenadas rectangulares, con el eje y positivo hacia abajo y el eje x en la parte superior de la compuerta.



La fuerza en la pared está dada por

$$F = \int_a^b \rho h dA$$

Como la superficie del agua coincide con el eje x se tiene que

$$h = y$$

El diferencial de área tiene un ancho constante de 10 metros y una altura dy

$$dA = 10dy$$

Para establecer los límites de integración hay que observar que valor tiene y donde se inicia la presión sobre la compuerta y que valor tiene y donde finaliza la presión sobre la misma. Para este problema la presión inicia en la parte superior del agua donde $y = 0$ y termina en el fondo de la piscina, donde $y = 1.8$. El peso específico del agua es una constante y se puede sustituir al finalizar los cálculos

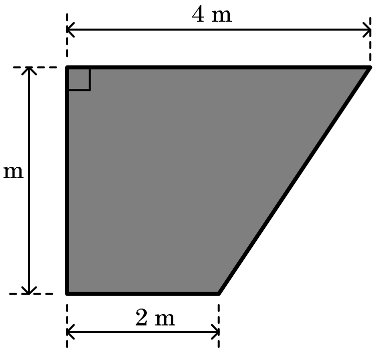
$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho h dA = \rho \int_0^{1.8} y(10dy) \\ &= 10\rho \int_0^{1.8} y dy = 10\rho\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1.8} \\ &= 10\rho\left[\frac{1}{2}(1.8)^2\right] = 16.2\rho \end{aligned}$$

Como el peso específico del agua es 1000 kg/m^3 o 9,800 N/m^3. La fuerza ejercida sobre la pared es

$$F = (16.2)(9{,}800) = 158{,}790 \text{ N}$$

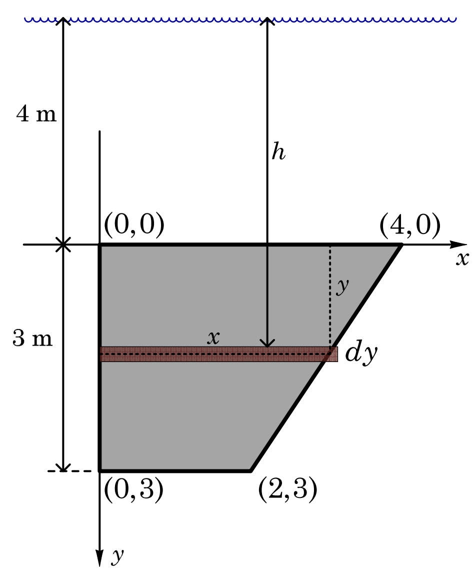
Ejemplo 2: Fuerza sobre una compuerta

La compuerta para evacuar el agua en una presa vertical tiene la forma mostrada en la figura. Si la parte superior de la compuerta se encuentra a una profundidad de 4 metros de la superficie del agua. Calcule la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta



Solución

La siguiente figura muestra la compuerta. Se ha establecido el origen del sistema de coordenadas en la parte superior izquierda de la compuerta, con el eje y positivo hacia abajo. En la figura también se indican las coordenadas de los puntos en las esquinas de la compuerta, que corresponden a la posición del sistema de coordenadas establecido.



La fuerza hidrostática está dada por

$$F = \rho \int_a^b h dA$$

Para calcular esta integral se sebe expresar la altura h y el diferencial de área dA en términos de la variable de integración y.

La expresión para la altura es

$$h = y + 4$$

El diferencial de área es un rectángulo de base x y altura dy

$$dA = x dy$$

Como la variable de integración es y, hay que expresar x en términos de y; para ello se puede utilizar semejanza de triángulos o bien la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4,0)$ y $(2,3)$. Para este ejemplo se utilizará la ecuación de la recta.

La pendiente es

$$m = \frac{3-0}{2-4} = -\frac{3}{2}$$

La ecuación de la recta es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x-4)$$

Despejando x en términos de y

$$2y = -3x + 12$$

$$3x = 12 - 2y$$

$$x = \frac{12-2y}{3}$$

Entonces

$$dA = x dy = \left(\frac{12-2y}{3}\right)dy$$

La fuerza sobre la compuerta es

$$F = \rho\int_a^b h dA = \rho\int_0^3 (y+4)\left(\frac{12-2y}{3}\right)dy$$

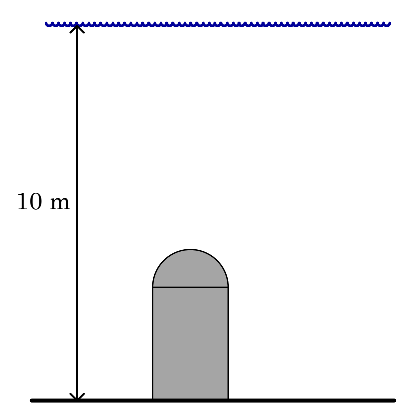
$$= \frac{\rho}{3}\int_0^3 \left(4y - 2y^2 + 48\right)dy = \frac{\rho}{3}\left[2y^2 - \frac{2}{3}y^3 + 48y\right]_0^3$$

$$= \frac{\rho}{3}\left(2(3)^2 - \frac{2}{3}(3)^3 + 48(3)\right) = \frac{\rho}{3}(18 - 18 + 164)$$

$$48\rho$$

Ejemplo 3: Compuerta formada por dos regiones

Una compuerta tiene forma de un rectángulo con un semicírculo sobrepuesto, como se muestra en la figura. La base del rectángulo es de 2 metros y la altura es 3 metros. Si la parte inferior de la compuesta está a una profundidad de 10 metros. Calcule la fuerza debida a la presión que el agua ejerce sobre la misma.

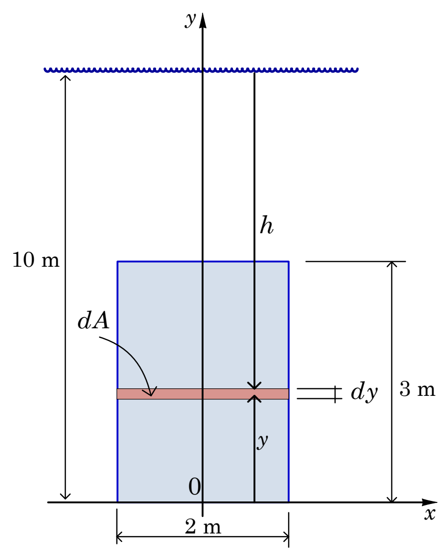


Solución

Para resolver este problema será necesario descomponer la compuerta en dos partes, la primera de ellas será la parte rectangular y la segunda será la parte en forma de semicírculo. La fuerza total sobre la compuerta será la suma de las dos fuerzas.

Por otro lado, para la solución de este problema se tomará el origen del sistema de coordenadas en la parte inferior de cada compuerta.

Para la primera parte se tiene la figura siguiente



La fuerza hidrostática es

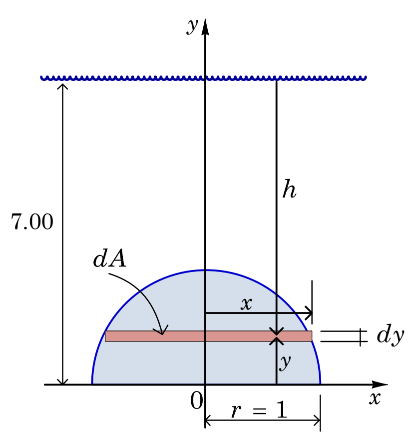
$$F_1 = \rho \int_a^b h dA$$

Donde $h = 10 - y$, $dA = 2dy$

Entonces

$$\begin{aligned} F_1 &= \rho \int_a^b h dA = \rho \int_0^3 (10 - y)(2dy) \\ &= 2\rho \int_0^3 (10 - y) dy = 2\rho \left[10y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^3 \\ &= 2\rho \left[10(3) - \frac{1}{2}(3)^2 \right] = 51\rho \end{aligned}$$

Para la segunda parte si tiene la siguiente figura



Como la compuerta tiene forma circular de radio 1, con el centro de la circunferencia en el origen del sistema de coordenadas, la ecuación es

$$x^2 + y^2 = 1$$

Como la variable de integración es y hay que despejar x

$$x = \sqrt{1 - y^2}$$

En este caso la fuerza hidrostática es

$$F_2 = \rho\int_a^b h dA$$

En donde

$$h = 7 - y$$

$$dA = 2x\, dy = 2\sqrt{1 - y^2}\, dy$$

Para calcular el diferencial de área se ha utilizado la simetría de la figura, razón por la cual el ancho en la base es $2x$.

Al sustituir en la integral de fuerza se tiene

$$\begin{aligned} F_2 &= \rho\int_a^b h dA = \rho\int_0^1 (7 - y)\left(2\sqrt{1 - y^2}\right) dy \\ &= 14\rho\int_0^1 \sqrt{1 - y^2}\, dy - 2\rho\int_0^1 y\sqrt{1 - y^2}\, dy \end{aligned}$$

La primera integral se debe calcular utilizando sustitución trigonométrica, pero sabemos que su valor es igual al área de un cuarto de circulo, entonces

$$14\rho\int_0^1 \sqrt{1 - y^2}\, dy = 14\rho\left(\frac{\pi r^2}{4}\right) = 14\rho\pi\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{2}\rho\pi$$

La segunda integral se puede calcular por medio de una sustitución

$$\begin{aligned} -2\rho\int_0^1 y\sqrt{1 - y^2}\, dy &= \rho\int_0^1 (-2y)\sqrt{1 - y^2}\, dy = \rho\left[1 - y^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \rho\left[(1 - 1) - (1 - 0)\right] = -\rho \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fuerza en la compuerta semicircular es

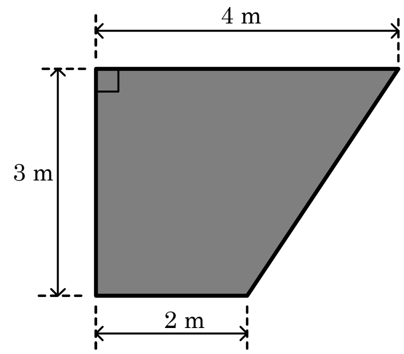
$$F_2 = \frac{7}{2}\rho\pi - \rho$$

La fuerza total sobre la compuerta es

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 = 51\rho + \left(\frac{7}{2}\rho\pi - \rho\right) = 50\rho + \frac{7}{2}\rho\pi \\ &= \frac{\rho(100 + 7\pi)}{2} \end{aligned}$$

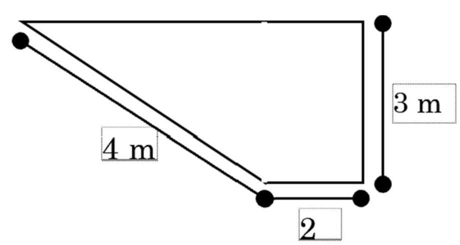
Ejercicios sobre fuerza hidrostática

1. La compuerta para evacuar el agua en una presa vertical tiene la forma mostrada en la figura. Si la parte superior de la compuerta se encuentra a una profundidad de 10 metros de la superficie del agua. Calcule la fuerza que ejerce el agua sobre la compuerta

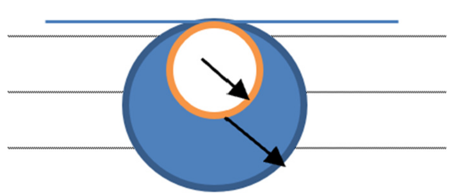


2. Una placa tiene la forma de una región limitada por la parábola $x^2 = 6y$ y la recta $2y = 3$, se coloca dentro de un tanque que contiene agua con su vértice en la parte de abajo y la recta en la superficie del agua. Determine la fuerza ejercida por la presión del agua sobre la cara de la placa si la distancia se mide en metros.

3. Una placa tiene la forma de la región indicada en la figura; se coloca verticalmente dentro de un tanque que contiene agua, la parte superior de la placa está 1 m bajo la superficie del agua. Determine la fuerza ejercida por la presión del agua sobre la placa.



4. Una placa metálica consta de un disco sólido de 1.50 m de radio y tiene un agujero circular de 0.75 m de radio, se sumerge en una presa que contiene agua en la posición mostrada en la siguiente figura.

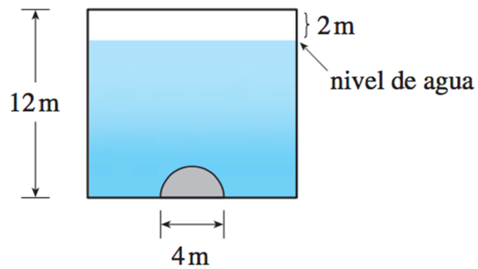


5. Determine la fuerza hidrostática que el agua le ejerce a una de las caras de dicho disco. Considera que la densidad del agua es de 1,000 Kg/m3

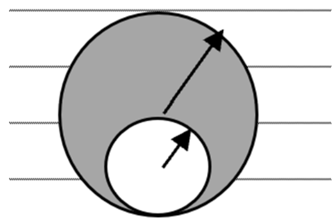
a. Una presa vertical tiene una compuerta semicircular como se muestra en la figura.

b. Plantee una integral para encontrar la fuerza hidrostática que se ejerce sobre la compuerta.

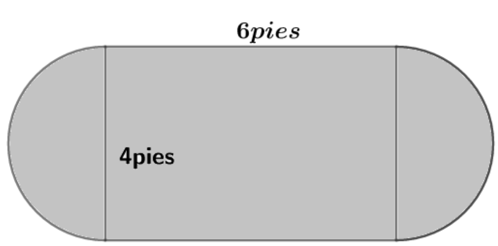
c. Utilice la regla de Simpson para encontrar un valor aproximado de la integral



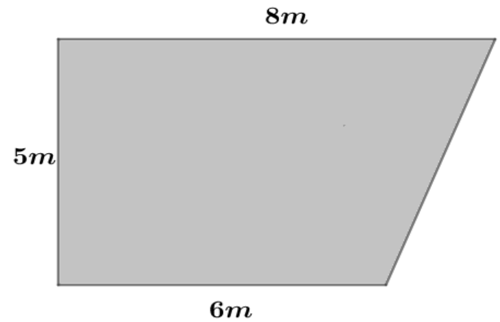
6. Una placa circular de 4 pies de radio se sumerge verticalmente de modo que el centro de la placa está a 10 pies por debajo de la superficie del agua. Plantee la integral para calcular la fuerza que el agua ejerce sobre un lado de la placa.
7. Una pieza metálica circular de radio 50.00 cm tiene un agujero circular de radio 25 cm, tal como se muestra en la siguiente figura. Si dicha pieza se encuentra sumergida totalmente, de tal forma que su punto más alto coincide con la superficie del agua de un gran lago salado calmo, cuya densidad es de 1025 kg/m3, determine la fuerza hidrostática sobre una de las caras de dicha pieza



8. Una presa vertical de 20 m de profundidad tiene una compuerta en forma de un triángulo isósceles de 15 m de ancho en su parte superior y 10 m de altura en el centro, colocada a 10 m de profundidad desde la superficie de agua a la parte superior de la compuerta. Plantee una integral para la fuerza total ejercida por la presión de agua en la cara de la presa.
9. La ventana de un observatorio de vida marina tiene la forma de una elipse con eje mayor horizontal de 6 metros y un eje menor de 4 metros, su centro se encuentra 20 m bajo el agua. Plantee la o las integrales que calculan la fuerza hidrostática sobre la ventana si la densidad del agua de mar es de 1027 kg/m3.
10. Una placa plana, en forma de cuarto de círculo de 4 m de radio, se sumerge verticalmente en aceite, de densidad 800 kg/m3 colocada a 1 m de profundidad desde la superficie de aceite a la parte superior de la placa. Plantee una integral para la fuerza total ejercida por la presión del aceite en la cara de la placa.
11. Un indicador de señales de submarino tiene la forma de un triángulo isósceles de lados 2.5 m y base de 2.0 m, horizontal, si su vértice superior está a 10.00 de la superficie del agua en un lago de agua dulce, determinar la fuerza hidrostática que el agua le hace a una de las caras. Compruebe su respuesta determinando la fuerza por medio de la idea del centroide del triángulo
12. Plantee la o las integrales para calcular la fuerza hidrostática sobre la cara mostrada del tanque, el cual esta lleno. Si el peso específico del agua es de 62.5 lb/pie3



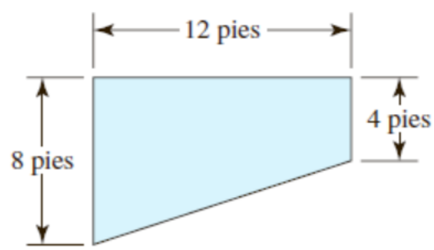
13. Plantee una integral que calcula la fuerza hidrostática sobre la compuerta de un canal, que tiene la forma de un trapecio. Si el agua está al borde superior del mismo.



14. Una pieza metálica tiene la forma que se muestra en la figura 1. Considere que el radio de la pieza es de 1.00 m y que el radio de la cavidad, que es circular, es de 0.5 m. bajo estas condiciones calcular:

Si dicha pieza se sumerge en gasolina (densidad 594 Kg/m3), de tal cuenta que su parte superior coincide con la superficie de la gasolina, la fuerza hidrostática que la gasolina le hace a una de las caras de la misma

15. Un extremo vertical de una piscina llena de agua, tiene la forma que se muestra en la figura. Plantee la integral de la fuerza ejercida por el agua sobre este lado de la piscina.



16. A 3 metros de profundidad en el mar se encuentra la base de una ventana con tiene forma de triángulo equilátero de lado 0.5 metros, dicha ventana está colocada verticalmente (con su base en la parte inferior). Plantee una integral para calcular la fuerza hidrostática que se ejerce sobre esta. $(\rho_{agua\ de\ mar} = 1{,}000\,\frac{Kg}{m^3})$

17. Determine una integral que representa la fuerza hidrostática sobre la cara transversal de un canal de agua, lleno hasta el 80% de su capacidad. Si su cara transversal es un trapezoide isósceles que en su parte inferior tiene 2 m de ancho, tiene una altura de 3 metros y en su parte superior de 4 m.

18. una lámina metálica tiene la forma que se muestra a continuación y se encuentra sumergida en un estanque de tal cuenta que su vértice superior está justo en la superficie del agua. Determine la fuerza hidrostática sobre una de las caras de la misma.