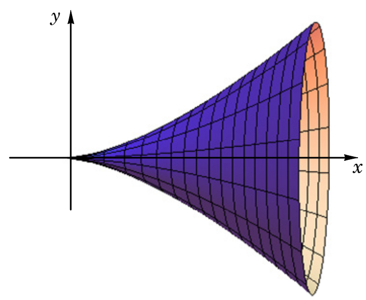
3.2 Superficie de revolución

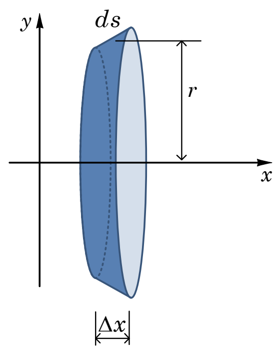
OBJETIVOS

- Encontrar el área de la superficie de revolución que se obtiene al rotar una curva alrededor del eje *x* o del eje *y*.

En esta sección se estudian los métodos para obtener el área de la superficie de un solido de revolución, que se genera cuando una curva en el plano se rotada alrededor del eje x o del eje y, como se muestra en la figura siguiente



Se puede suponer que la superficie está formada por una cantidad infinita de diferenciales de superficie en forma de conos truncados como el de la figura siguiente



Se puede demostrar utilizando geometría, que el área de la superficie del cono truncado está dada por

$$A = 2\pi rL$$

Donde L es la longitud de la cara inclinada y $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$. r_1 y r_2 son los radios de las bases del cono truncado.

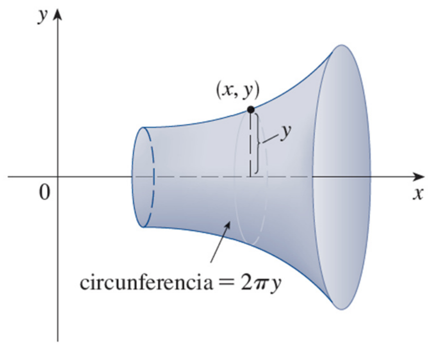
Al utilizar la nomenclatura diferencial, el área del cono truncado será el diferencial de superficie, la longitud de la cara inclinada será el diferencial de longitud ds. De tal forma que el diferencial de superficie esta dado por

$$dS = 2\pi r ds$$

Al integrar, se obtiene una expresión para la superficie de revolución

$$S = \int_a^b 2\pi r\, ds$$

Si la curva se rota alrededor del eje x



(a) Rotación en torno al eje x: $S = \int 2\pi y\, ds$

Y la ecuación está expresada en la forma $y = f(x)$. Se obtiene que el radio es

$$r = y = f(x)$$

El área de la superficie de revolución se puede expresar como

$$S = \int_a^b 2\pi r\, ds = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

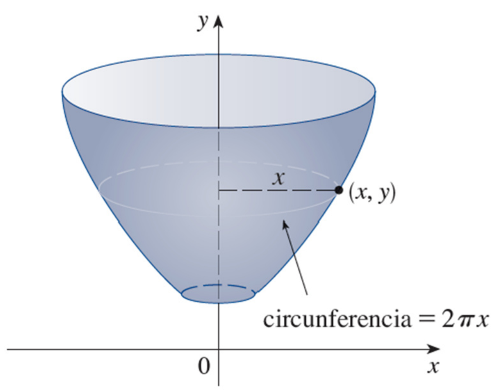
En forma equivalente cuando la ecuación de la curva esta expresada en la forma

$$x = f(y)$$

La superficie generada al rotar la curva alrededor del eje x se puede expresar como

$$S = \int_c^d 2\pi r\, ds = \int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + [f'(y)]^2}\, dy$$

Si la curva se rota alrededor del eje y



(b) Rotación respecto al eje y: $S = \int 2\pi x\, ds$

Se obtiene que el radio es

$$r = x$$

El área de la superficie de revolución se puede expresar como

$$S = \int_a^b 2\pi r\, ds = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

La superficie generada al rotar la curva alrededor del eje y se puede expresar como

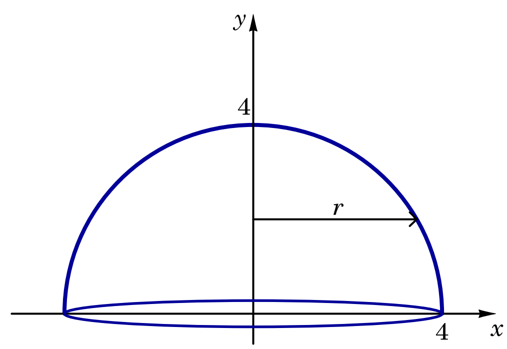
$$S = \int_c^d 2\pi r\ ds = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\ dy = \int_c^d 2\pi f(y)\sqrt{1+[f'(y)]^2}\ dy$$

Ejemplo 1: Superficie de revolución

Obtenga el área de la superficie de revolución que se obtiene al rotar la curva $y=\sqrt{16-x^2}$ en el intervalo $[0,4]$, alrededor del eje y

Solución

La figura siguiente muestra la curva y la superficie de revolución generada por la rotación alrededor del eje y. Es claro que la región obtenida es una semiesfera de radio 4



La superficie de revolución está dada por

$$S = \int_a^b (2\pi r) ds$$

Como el eje de rotación es el eje y se tiene que

$$r = x$$

$$S = \int_0^4 (2\pi r) ds = \int_0^4 (2\pi x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Calculando la derivada de la función

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{16-x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(16-x^2\right)^{-1/2}(-2x)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$$

El diferencial de longitud ds es

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}\right)^2}\,dx \\
&= \sqrt{1+\frac{x^2}{16-x^2}}\,dx = \sqrt{\frac{16-x^2+x^2}{16-x^2}}\,dx \\
&= \sqrt{\frac{16}{16-x^2}}\,dx \\
&= \frac{4}{\sqrt{16-x^2}}
\end{aligned}$$

Entonces la superficie de revolución está dada por

$$\begin{aligned}
S &= \int_a^b (2\pi r)\,ds = \int_0^4 (2\pi x)\frac{4}{\sqrt{16-x^2}}\,dx \\
&= 8\pi\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\,dx
\end{aligned}$$

Ahora se procede a calcular la integral indefinida por medio de una sustitución

$$\begin{aligned}
u &= 16-x^2 \\
du &= -2x\,dx \\
-\frac{1}{2}du &= x\,dx
\end{aligned}$$

Realizando la sustitución

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\,dx &= -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right) = -u^{1/2} \\
&= -\sqrt{16-x^2}
\end{aligned}$$

Evaluando la integral

$$\begin{aligned}
S &= 8\pi\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{16-x^2}}\,dx \\
&= 8\pi\left[-\sqrt{16-x^2}\right]_0^4 \\
&= 8\pi\left[-\sqrt{16-4^2}\right] - 8\pi\left[-\sqrt{16-0^2}\right] \\
&= 8\pi(0) + 8\pi(4) \\
&= 32\pi
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Planteo de la integral de superficie

Plantee una integral para calcular el área de la superficie de revolución que se genera cuando la curva

$$y = \tan^{-1} x\,,\ 0 \le x \le 2$$

a. Se gira alrededor del eje x.

b. Se gira alrededor del eje y.

Solución

a. Si el eje de rotación es el eje x se tiene que $r = y$

$$S = \int_a^b (2\pi r) ds = \int_0^2 (2\pi y)\, ds$$

Como la función está en términos de x

$$r = y = f(x) = \tan^{-1} x$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}\, dx$$

La superficie de revolución está dada por

$$S = \int_0^2 (2\pi y)\, ds = \int_0^2 \left(2\pi \tan^{-1} x\right) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} dx$$

Realizando algunas operaciones algebraicas se tiene

$$S = \int_0^2 \left(2\pi \tan^{-1} x\right) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left(\tan^{-1} x\right) \sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)^2 + 1}{\left(1+x^2\right)^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 \frac{\left(\tan^{-1} x\right)}{1+x^2} \sqrt{\left(1 + 2x^2 + x^4\right) + 1}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 \frac{\left(\tan^{-1} x\right)}{1+x^2} \sqrt{2 + 2x^2 + x^4}\, dx$$

b. Si el eje de rotación es el eje y se tiene que $r = x$

$$S = \int_a^b (2\pi r) ds = \int_0^2 (2\pi x)\, ds$$

Como la función está en términos de x

$$r = x$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}\, dx$$

La superficie de revolución está dada por

$$S = \int_0^2 (2\pi x)\, ds = \int_0^2 (2\pi x) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} dx$$

Realizando algunas operaciones algebraicas se tiene

$$S = \int_0^2 (2\pi x) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 x \sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)^2 + 1}{\left(1+x^2\right)^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 \frac{x}{1+x^2} \sqrt{\left(1 + 2x^2 + x^4\right) + 1}\, dx$$

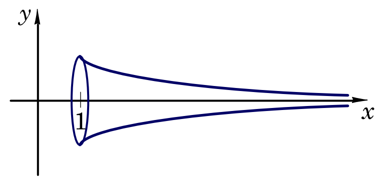
$$= 2\pi \int_0^2 \frac{x}{1+x^2} \sqrt{2 + 2x^2 + x^4}\, dx$$

Ejemplo 3: Superficie de revolución con integral impropia

La curva $y = \dfrac{1}{x}$, $x \geq 1$; se hace girar alrededor del eje x. Determine el área de la superficie de revolución resultante si éste existe.

Solución

La figura siguiente muestra la curva y la superficie de revolución generada por la rotación alrededor del eje x.



La superficie de revolución está dada por

$$S = \int_1^\infty (2\pi r)ds$$

Como el eje de rotación es el eje x, se tiene que

$$r = y = \frac{1}{x}$$

El diferencial de longitud ds es

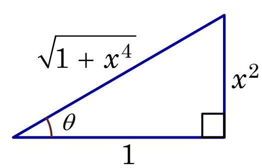
$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}\, dx = \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^4}}\, dx = \frac{1}{x^2}\sqrt{x^4 + 1}\, dx$$

Entonces la superficie de revolución está dada por

$$S = \int_1^\infty (2\pi r)ds = \int_1^\infty \left(2\pi \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\sqrt{1 + x^4}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^\infty \left(\frac{\sqrt{1 + x^4}}{x^3}\right)dx$$

Ahora se procede a calcular la integral indefinida, para la cual es necesario utilizar una sustitución trigonométrica



$$\tan\theta = \frac{x^2}{1} \qquad \text{entonces} \qquad \begin{aligned} x^2 &= \tan\theta \\ 2x dx &= \sec^2\theta\, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^4}(2xdx) = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan^2\theta}\sec^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\sec^2\theta}}{\tan^2\theta}\sec^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sec\theta \cdot \sec^2\theta}{\tan^2\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{\sec\theta(1+\tan^2\theta)}{\tan^2\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta + \frac{1}{2}\int \sec\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta + \frac{1}{2}\int \sec\theta d\theta \\
&= -\frac{1}{2\operatorname{sen}\theta} + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| \\
&= -\frac{1}{2}\csc\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta|
\end{aligned}$$

Finalmente hay que expresar la integral en términos de x

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}dx &= -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}}{1} + x^2\right| \\
&= -\frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + \sqrt{1+x^4}\right|
\end{aligned}$$

Una vez calculada la integral indefinida, se puede calcular la integral impropia, para obtener la superficie de revolución, siempre y cuando la integral converja

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_1^{\infty}\left(\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}\right)dx = 2\pi\lim_{t\to\infty}\left[\int_1^{t}\left(\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}\right)dx\right] \\
&= 2\pi\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{1+x^4}\right|\right]_1^t \\
&= 2\pi\lim_{t\to\infty}\left[\left(-\frac{\sqrt{1+t^4}}{2t^2} + \frac{1}{2}\ln\left|t^2+\sqrt{1+t^4}\right|\right) - \left(-\frac{\sqrt{1+1^4}}{2(1)} + \frac{1}{2}\ln\left|1^2+\sqrt{1+1^4}\right|\right)\right] \\
&= 2\pi\left[\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{1+t^4}}{2t^2}\right) + \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\ln\left(t^2+\sqrt{1+t^4}\right)\right] + \lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2} - \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right)\right] \\
&= 2\pi\left(-\frac{1}{2} + \infty + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Como el segundo límite es infinito, la integral es divergente y la superficie de revolución es infinita.

Ejercicios sobre superficies de revolución

En los ejercicios siguientes, plantee una integral que permita calcular la superficie de revolución al rotar la curva alrededor del eje x, en el intervalo indicado.

1. $y = \cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

2. $y = x^2 e^x, \quad 0 \le x \le 1$

3. $x = y^2 + 2y \quad -1 \le y \le 1$

4. $y^2 = \ln x \quad 0 \le y \le 2$

En los ejercicios siguientes, plantee una integral que permita calcular la superficie de revolución al rotar la curva alrededor del eje y, en el intervalo indicado.

5. $y = \cos x, \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

6. $y = x^2 e^x, \quad 0 \le x \le 1$

7. $x = y^2 + 2y \quad -1 \le y \le 1$

8. $y^2 = \ln x \quad 0 \le y \le 2$

En los ejercicios siguientes calcule el área de la superficie que se genera al rotar la curva dada alrededor del eje x

9. $y = x^3, \quad 0 \le x \le 2$

10. $9x = y^2 + 18 \quad 2 \le x \le 6$

11. $y = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \quad 0 \le x \le \pi$

12. $x = \sqrt{1 + 4y}, \quad 0 \le y \le 2$

13. $y = \operatorname{sen}(\pi x), \quad 0 \le x \le 1$

14. $x = 1 + 2y^2, \quad 1 \le y \le 2$

En los ejercicios siguientes calcule el área de la superficie que se genera al rotar la curva dada alrededor del eje x

15. $y = \dfrac{1}{3}x^{3/2}, \quad 0 \le x \le 12$

16. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \quad 0 \le y \le 1$

17. $x = \sqrt{a^2 - y^2}, \quad 0 \le y \le \dfrac{a}{2}$

18. $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln x, \quad 1 \le x \le 2$

19. Determine El área de la superficie generada al rotar alrededor del eje x la curva generada por la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Utilizando la regla de Simpson con $n = 6$

20. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para aproximar el área superficial generada por la rotación de la curva $f(x) = \ln(x + 2)$ en el intervalo $2 \le x \le 4$ alrededor del eje x.