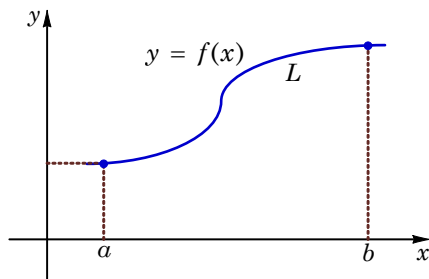


3.1 Longitud de una curva

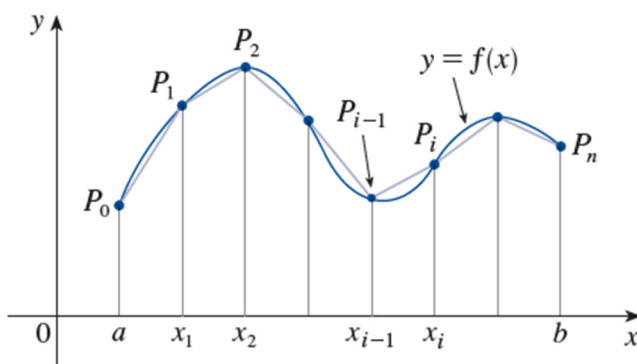
OBJETIVOS

- Encontrar la longitud de una curva en el plano.

En esta sección se estudian los métodos para encontrar la longitud de una curva en el plano que está expresada por medio de la función $y = f(x)$.



Para obtener una expresión para la longitud de arco, suponga que la curva está formada por una cantidad infinita de segmentos rectos de longitud ds

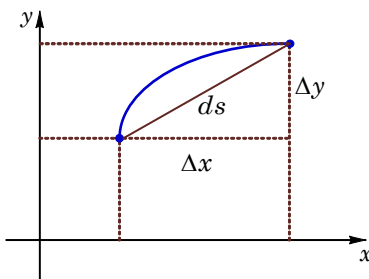


De tal forma que la longitud de la curva se puede expresar como la suma de todos estos segmentos

$$L \approx \sum_{i=1}^n ds_i$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ds_i = \int_a^b ds$$

La expresión para ds se obtiene utilizando el teorema de Pitágoras en la siguiente figura



Por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$ds = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Multiplicando por Δx y dividiendo entre Δx se obtiene

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ &= \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}} \cdot \Delta x \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Como $\Delta x = dx$ y además cuando Δx tiende a cero

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Se obtiene que

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx$$

Longitud de arco

Si f es una función tal que $f'(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces la longitud L de la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b ds \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \cdot dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx \end{aligned}$$

El diferencial de longitud ds también se puede 3 expresar, de tal forma que la longitud de la curva se pueda calcular integrando sobre el eje y .

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy$$

De manera que la longitud de la curva se puede calcular como

$$L = \int_c^d ds = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \cdot dy$$

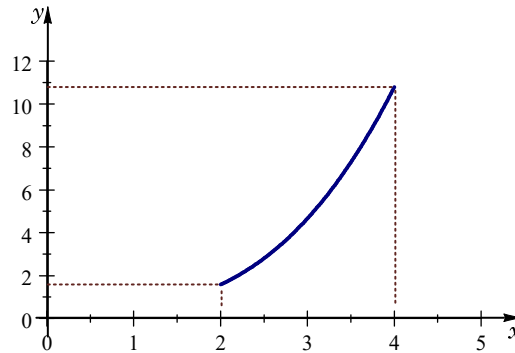
Ejemplo 1: Longitud de arco

Calcule la longitud de arco de la curva en el intervalo $[2, 4]$

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$$

Solución

La siguiente figura muestra la gráfica de la función en el intervalo $[2, 4]$



La longitud de arco de la curva está dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Calculando la primera derivada de la función se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x} \right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la integral y simplificando se tiene

$$\begin{aligned} L &= \int_2^4 \sqrt{1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2} \right]^2} dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}x^4 - 2\left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \frac{1}{4x^4} \right)} dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4} \right)} dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^4}} dx \end{aligned}$$

Observe que la expresión dentro del radical es muy parecida a la expresión dentro del paréntesis en la línea superior, con la única diferencia que el número $\frac{1}{2}$ está sumando y no restando; por lo tanto, se factoriza como un trinomio cuadrado perfecto, solo que ahora con signo positivo

$$\begin{aligned} L &= \int_2^4 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2} \right)^2} dx \\ &= \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2} \right) dx \\ &= \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^{-2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2x} \right]_2^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{6}(4)^3 - \frac{1}{2(4)} \right) - \left(\frac{1}{6}(2)^3 - \frac{1}{2(2)} \right) \\
 &= \left(\frac{253}{24} \right) - \left(\frac{13}{12} \right) \\
 &= \frac{227}{24}
 \end{aligned}$$

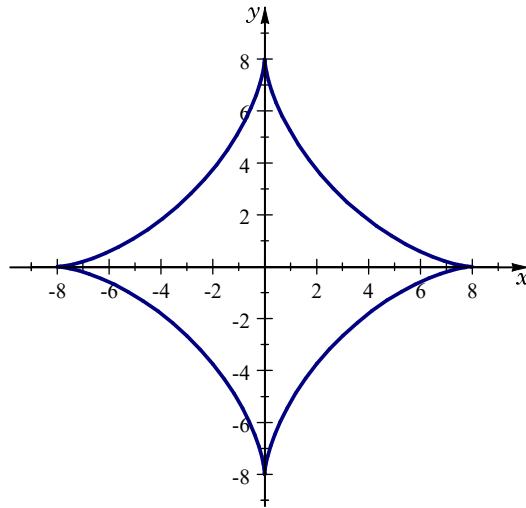
Ejemplo 2: Longitud de arco

Encuentre la longitud total de la gráfica del astroide cuya ecuación es

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4$$

Solución

Al utilizar un programa de cómputo se dibuja la gráfica del astroide se obtiene la figura siguiente



Como se observa, la gráfica es simétrica respecto a ambos ejes, por lo que para calcular la longitud total de la curva, será suficiente con calcular la longitud de la curva en el primer cuadrante y multiplicar el resultado por 4, es decir

$$L = 4 \int_a^b ds = 4 \int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

Despejando y en la ecuación dada.

$$\begin{aligned}
 x^{2/3} + y^{2/3} &= 4 \\
 y^{2/3} &= 4 - x^{2/3} \\
 y &= (4 - x^{2/3})^{3/2}
 \end{aligned}$$

Calculando la primera derivada se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (4 - x^{2/3})^{3/2} = \frac{3}{2} (4 - x^{2/3})^{1/2} \left(-\frac{2}{3} x^{-1/3} \right) = -\frac{(4 - x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}}$$

Sustituyendo la derivada en la fórmula de la longitud de arco y desarrollando las operaciones resultantes se obtiene

$$\begin{aligned}
 L &= 4 \int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 4 \int_0^8 \sqrt{1 + \left(-\frac{(4 - x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}}\right)^2} dx \\
 L &= 4 \int_0^8 \sqrt{1 + \frac{(4 - x^{2/3})}{x^{2/3}}} dx \\
 &= 4 \int_0^8 \sqrt{1 + \frac{4 - x^{2/3}}{x^{2/3}}} dx \\
 &= 4 \int_0^8 \sqrt{\frac{x^{2/3} + 4 - x^{2/3}}{x^{2/3}}} dx \\
 &= 4 \int_0^8 \sqrt{\frac{4}{x^{2/3}}} dx \\
 &= 4 \int_0^8 \frac{2}{x^{1/3}} dx \\
 &= 8 \left[\frac{x^{2/3}}{\frac{2}{3}} \right]_0^8 \\
 &= 12(8)^{2/3} - 12(0)^{2/3} \\
 &= 48
 \end{aligned}$$

Ejercicios sobre longitud de arco

En los ejercicios siguientes, plantee una integral que permita calcular la longitud de arco de la curva dada en el intervalo indicado.

1. $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

2. $y = x^2 e^x$, $0 \leq x \leq 1$

3. $x = y^2 + 2y$, $-1 \leq y \leq 1$

4. $y^2 = \ln x$, $0 \leq y \leq 2$

En los ejercicios siguientes, determine la longitud exacta de la curva

5. $y = 1 + 6x^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$

6. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, $1 \leq x \leq 2$

7. $y = \frac{x^5}{6} + \frac{1}{10x^3}$, $1 \leq x \leq 2$

8. $y = \ln(\sec x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

9. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $1 \leq x \leq 2$

10. $y = \sqrt{x - x^2} + \sin^{-1}(\sqrt{x})$, en su dominio

11. Determine la longitud de arco de la curva generada por la función

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Utilizando la regla del punto medio con $n = 6$

12. Dada la función

$$f(x) = (x^2 - 2)e^{-x^2}$$

a. Plantee la integral para calcular la longitud de arco en el intervalo $[0, 4]$

b. Aproxime la longitud de arco utilizando la regla de Simpson con $n = 4$

13. Para la función:

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

Aproxime el área bajo la curva, usando el método numérico de Simpson, con $n = 6$ en el intervalo $[0, 2]$

16. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para aproximar la longitud de la curva $f(x) = \ln(x + 2)$ en el intervalo $2 \leq x \leq 4$.