2.6 Integrales impropias

OBJETIVOS

- Calcular integrales impropias con límites de integración infinitos.
- Calcular integrales impropias en intervalos donde la función no está definida en uno de los extremos del intervalo.
- Calcular integrales impropias en intervalos cerrados donde la función no está definida en algún valor del intervalo cerrado.

Integral Impropia tipo 1

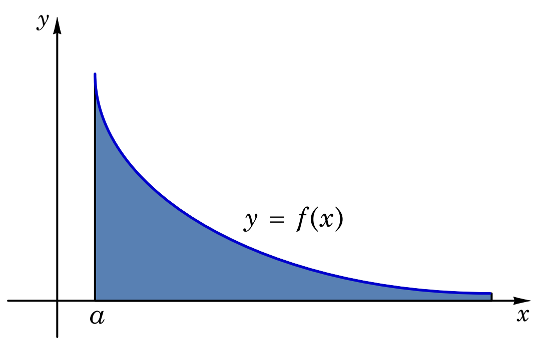
Se le llama integral impropia tipo 1 a las integrales que tienen límites de integración infinitos. Para el tipo 1 se pueden presentar 3 casos

Caso 1

Si $f(x)$ es una función que está definida en todos los puntos del intervalo $[a,+\infty)$ entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

Siempre que el límite exista. Si el límite existe se dice que la integral es convergente y si el límite no existe se dice que la integral es divergente. La siguiente figura ilustra el área bajo la curva correspondiente a esta integral

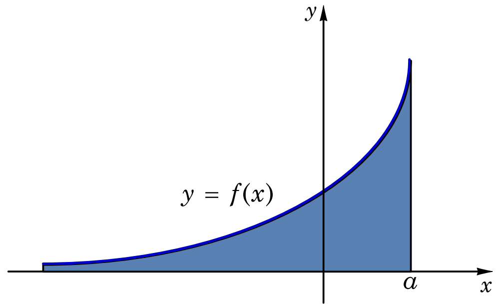


Caso 2

Si $f(x)$ es una función que está definida en todos los puntos del intervalo $(-\infty,a]$ entonces

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx$$

Siempre que el límite exista. Si el límite existe se dice que la integral es convergente y si el límite no existe se dice que la integral es divergente. La siguiente figura ilustra el área bajo la curva correspondiente a esta integral

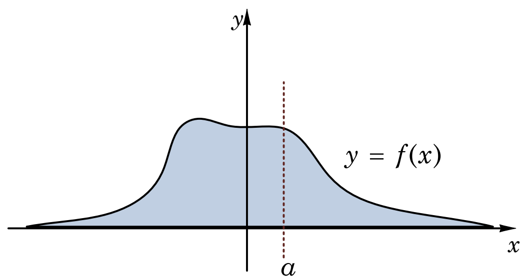


Caso 3

Si $f(x)$ es una función que está definida en todos los puntos del intervalo $(-\infty,\infty]$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$
$$= \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{a} f(x)\,dx + \lim_{t\to\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx$$

En donde a es cualquier número real. Para que esta integral converja es necesario que las dos integrales sean convergentes, de otra forma la integral es divergente. La siguiente figura ilustra esta situación



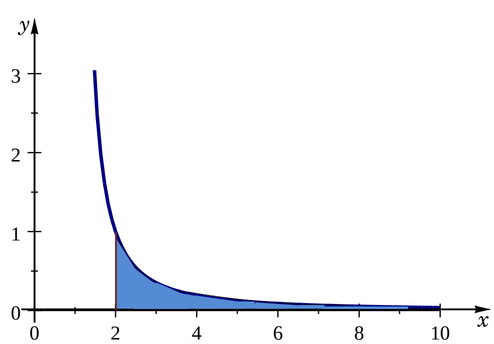
Ejemplo 1: Límite de integración infinito

Calcule la integral impropia

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{3/2}}$$

Solución

La siguiente figura muestra la gráfica de la función, así como el área bajo la curva correspondiente a la integral definida



Observe que la función no está definida en $x = 1$, pero esté valor está fuera del intervalo de integración $[2,+\infty)$. La integral es impropia pues la función no está definida en el límite superior de integración, entonces

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{3/2}} = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{dx}{(x-1)^{3/2}}$$

Primero se debe calcular la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{3/2}}$$

La integral se calcula fácilmente haciendo la sustitución

$$u = x - 1$$
$$du = dx$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-1)^{3/2}} &= \int \frac{du}{(u)^{3/2}} \\
&= \int u^{-3/2} du \\
&= \frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{-2}{(x-1)^{1/2}}
\end{aligned}$$

Ahora se puede calcular la integral impropia

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{3/2}} &= \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{dx}{(x-1)^{3/2}} \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-2}{(x-1)^{1/2}} \right]_2^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{-2}{(t-1)^{1/2}} - \frac{-2}{(2-1)^{1/2}} \right] \\
&= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{-2}{(t-1)^{1/2}} \right) - \lim_{t\to\infty} (-2) \\
&= 0 + 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Integral con dos límites de integración infinitos

Calcule la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

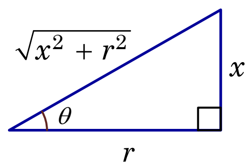
Donde r es un constante

Solución

Primero se debe calcular la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Para calcular esta integral es necesario utilizar sustitución trigonométrica. Hacemos



$$\tan\theta = \frac{x}{r}$$

$$x = r\tan\theta$$

$$dx = r\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} &= \int \frac{r\sec^2\theta d\theta}{\left[(r\tan\theta)^2 + r^2\right]^{3/2}} \\
&= \int \frac{r\sec^2\theta d\theta}{\left[r^2\tan^2\theta + r^2\right]^{3/2}} \\
&= \int \frac{r\sec^2\theta d\theta}{\left[r^2(\tan^2\theta + 1)\right]^{3/2}} = \int \frac{r\sec^2\theta d\theta}{\left[r^2(\sec^2\theta)\right]^{3/2}} \\
&= \int \frac{r\sec^2\theta d\theta}{r^3\sec^3\theta} = \frac{1}{r^2}\int \frac{d\theta}{\sec\theta} \\
&= \frac{1}{r^2}\int \cos\theta d\theta \\
&= \frac{1}{r^2}\operatorname{sen}\theta + c
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$ se tiene que

$$\int \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} + c$$

Ahora se procede a evaluar la integral impropia

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} + \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}\right]_t^0 + \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}\right]_0^t \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{r^2}\frac{0}{\sqrt{0 + r^2}} - \frac{1}{r^2}\frac{t}{\sqrt{t^2 + r^2}}\right] + \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{r^2}\frac{t}{\sqrt{t^2 + r^2}} - \frac{1}{r^2}\frac{0}{\sqrt{0 + r^2}}\right] \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{t}{\sqrt{t^2 + r^2}}\right) + \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{r^2}\frac{t}{\sqrt{t^2 + r^2}}\right)
\end{aligned}$$

Calculando los límites

$$\lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{t}{\sqrt{t^2+r^2}}\right)=-\frac{1}{r^2}\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+r^2}}\right)\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}=-\frac{1}{r^2}\lim_{t\to-\infty}-\frac{1}{r^2}\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{t^2+r^2}}{t}}\right)$$

$$=-\frac{1}{r^2}\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{r^2}{t^2}}}\right)=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{-\sqrt{1+0}}\right)=\frac{1}{r^2}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{r^2}\frac{t}{\sqrt{t^2+r^2}}\right)=\frac{1}{r^2}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+r^2}}\right)\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}=\frac{1}{r^2}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{t^2+r^2}}{t}}\right)$$

$$=\frac{1}{r^2}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r^2}{t^2}}}\right)=\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+0}}\right)=\frac{1}{r^2}$$

Ahora ya se puede obtener el resultado de la integral impropia

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+r^2)^{3/2}}&=\lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{t}{\sqrt{t^2+r^2}}\right)+\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{r^2}\frac{t}{\sqrt{t^2+r^2}}\right)\\&=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}\\&=\frac{2}{r^2}\end{aligned}$$

Integral Impropia tipo 2

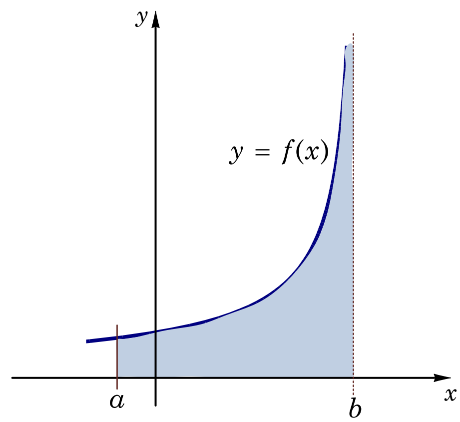
Se le llama integral impropia tipo 2 a las integrales que son discontinuas en algún punto del intervalo de integración

Caso 1

Si $f(x)$ es una función que está definida en todos los puntos del intervalo $[a,b)$ y es discontinua en $x=b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

Siempre que el límite exista. Si el límite existe se dice que la integral es convergente y si el límite no existe se dice que la integral es divergente. La siguiente figura ilustra el área bajo la curva correspondiente a esta integral

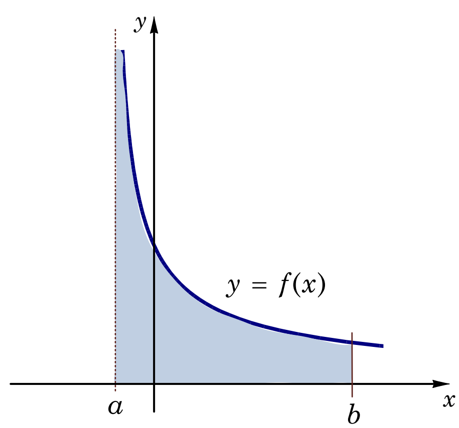


Caso 2

Si $f(x)$ es una función que está definida en todos los puntos del intervalo $(a, b]$ y es discontinua en $x = a$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

Siempre que el límite exista. Si el límite existe se dice que la integral es convergente y si el límite no existe se dice que la integral es divergente. La siguiente figura ilustra el área bajo la curva correspondiente a esta integral



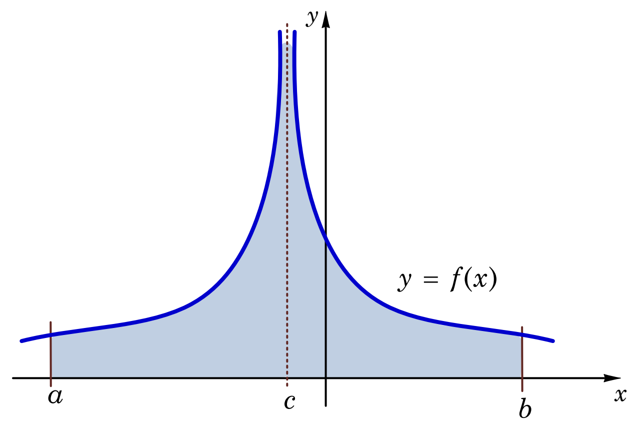
Caso 3

Si $f(x)$ es una función que es discontinua en $x = c$, donde $a < c < b$ $(a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

Para que esta integral converja es necesario que las dos integrales sean convergentes, de otra forma la integral es divergente. La siguiente figura ilustra esta situación



Ejemplo 3: Integral impropia tipo 2

Calcule la integral impropia

$$\int_0^{\pi/2} \tan^2\theta\, d\theta$$

Solución

Observe que la función $\tan\theta$ no está definida para $\theta = \frac{\pi}{2}$ ya que la función tangente tiende al infinito cuando θ tiende a $\frac{\pi}{2}$, razón por la cual la integral es impropia y se calcula de la forma siguiente

$$\int_0^{\pi/2} \tan^2\theta\, d\theta = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan^2\theta\, d\theta$$

Como primer paso se debe calcular la integral indefinida.

$$\int \tan^2\theta\, d\theta$$

Utilizando la sustitución $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

$$\int \tan^2\theta\, d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)\, d\theta$$

$$= \tan\theta - \theta + c$$

Ahora se puede evaluar la integral desde 0 hasta t

$$\int_0^t \tan^2\theta\, d\theta = [\tan\theta - \theta]_0^t$$

$$= (\tan t - t) - (\tan 0 - 0)$$

$$= \tan t - t$$

Finalmente se evalúa el límite

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \tan^2\theta\, d\theta &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^t \tan^2\theta\, d\theta\\ &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan t - t)\\ &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan t) - \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}(t)\\ &= +\infty - \frac{\pi}{2}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Entonces la integral $\int_0^{\pi/2}\tan^2\theta\, d\theta$ es divergente

Ejemplo 4: Integral impropia tipo 2

Calcule la integral impropia

$$\int_{-1}^{0}\frac{e^{1/x}}{x^3}dx$$

Solución

La función que se va a integrar no está definida en 0, entonces

$$\int_{-1}^{0}\frac{e^{1/x}}{x^3}dx = \lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t}\frac{e^{1/x}}{x^3}dx$$

Como primer paso se debe calcular la integral indefinida.

$$\int\frac{e^{1/x}}{x^3}dx$$

Utilizando integración por partes

$$u = \frac{1}{x} \qquad dv = \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$$

$$du = -\frac{1}{x^2} \qquad v = \int\frac{e^{1/x}}{x^2}dx = -\int e^{1/x}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = -e^{1/x}$$

Al integrar por partes se tiene

$$\begin{aligned}\int\frac{e^{1/x}}{x^3}dx &= \frac{1}{x}\cdot\left(-e^{1/x}\right) - \int\left(-e^{1/x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\\ &= -\frac{e^{1/x}}{x} + \int\left(e^{1/x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\\ &= -\frac{e^{1/x}}{x} + e^{1/x}\\ &= e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Ahora se puede evaluar la integral desde -1 hasta t

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{t} \frac{e^{1/x}}{x^3}dx &= \left[e^{1/x}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]_{-1}^{t} \\ &= e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right) - e^{1/-1}\left(1-\frac{1}{-1}\right) \\ &= e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right) - e^{-1}(2) \\ &= e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right) - \frac{2}{e}\end{aligned}$$

Finalmente se evalúa el límite

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}dx &= \lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t} \frac{e^{1/x}}{x^3}dx \\ &= \lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right) - \frac{2}{e}\right] \\ &= \lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right)\right] - \lim_{t\to 0^-}\left[\frac{2}{e}\right] \\ &= \lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right)\right] - \frac{2}{e}\end{aligned}$$

Para calcular el límite que hace falta se utilizará la regla de L'Hopital

$$\lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right)\right]$$

Este límite tiene forma $0\cdot\infty$ ya que

$$e^{1/0^-} \to e^{-\infty} \to \frac{1}{e^{\infty}} \to 0$$

$$1-\frac{1}{0^-} \to 1-(-\infty) \to \infty$$

Para que se pueda utilizar la regla de L'hospital el límite se expresa como

$$\lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right)\right] = \lim_{t\to 0^-}\frac{1-\frac{1}{t}}{e^{-1/t}}$$

Que tiene forma $\frac{\infty}{\infty}$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right)\right] &= \lim_{t\to 0^-}\frac{1-\frac{1}{t}}{e^{-1/t}} \\ &= \lim_{t\to 0^-}\frac{\frac{1}{t^2}}{e^{-1/t}\cdot\left(\frac{1}{t^2}\right)} \\ &= \lim_{t\to 0^-}\frac{1}{e^{-1/t}} = \frac{1}{e^{-1/0^-}} = \frac{1}{e^{\infty}} \\ &= \frac{1}{\infty} \\ &= 0\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de límite se tiene que la integral impropia es

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{e^{1/x}}{x^3}dx &= \lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t}\frac{e^{1/x}}{x^3}dx\\ &= \lim_{t\to 0^-}\left[e^{1/t}\left(1-\frac{1}{t}\right)\right]-\frac{2}{e}\\ &= 0-\frac{2}{e}\\ &= -\frac{2}{e}\end{aligned}$$

Ejercicios sobre integrales impropias

En los ejercicios siguientes, calcule la integral impropia que se propone, indique si la integral es convergente o divergente. En el caso que sea convergente calcule su valor.

1. $\int_0^e \ln x\,dx$

2. $\int_{-4}^{4}\frac{dx}{(x+4)^{2/3}}$

3. $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

4. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x-1)^3}$

5. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

6. $\int_0^1 \frac{dx}{x+x^3}$

7. $\int_0^e \ln(x^2)dx$

8. $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x-4}}dx$

9. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

10. $\int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}\,dx$

11. $\int_0^e x\ln x\,dx$

12. $\int_0^e y\ln(2y)\,dy$

13. $\int_0^{+\infty}\tan x\,dx$

14. $\int_{-\infty}^{0}e^x\,dx$

15. $\int_1^{+\infty}\frac{2x}{x^2+4}\,dx$

16. $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

17. $\int_0^{\infty}\frac{e^{-1/x}}{x^2}dx$

18. $\int_0^{\infty}e^{-x}\operatorname{sen}x\,dx$

19. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3}{25+x^2}dx$

20. $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx$

21. $\int_0^{\infty}xe^{-x^2}\,dx$

22. $\int_{-1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$

23. $\int_0^{\infty}\frac{1}{2x^2+5x+2}\,dx$

24. $\int_3^{\infty}\frac{x^2+x+9}{x^3+9x}\,dx$

25. Para la función $f(x)=\frac{1}{x}$, $\qquad x\ge 1$

a. Calcule el área limitada por $f(x)$, el eje x en el intervalo indicado y demuestre que ésta diverge.

b. Rote la región anterior alrededor del eje x y calcule el volumen del solido generado y demuestre que este volumen existe; es decir: la integral generada es convergente.