2.5 Integración aproximada

OBJETIVOS

- Calcular integrales definidas en forma aproximada utilizando la regla del punto medio.
- Calcular integrales definidas en forma aproximada utilizando la regla del trapecio.
- Calcular integrales definidas en forma aproximada utilizando la regla de Simpson.

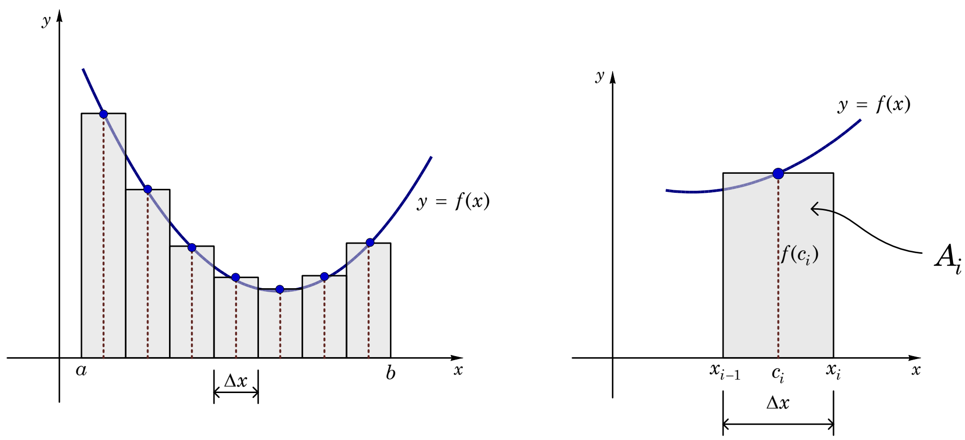
En este tema se estudian tres métodos para calcular integrales definidas utilizando cálculos numéricos. Los métodos que se estudian son: la regla del punto medio, la regla del trapecio y la regla de Simpson

Regla del punto medio

La regla del punto medio se base en el teorema fundamental del cálculo que establece que la integral definida es aproximar por medio de una suma de Riemann

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

Al tomar c_i como el punto medio de cada intervalo, como se muestra en la siguiente figura



El valor de Δx se calcula de la forma acostumbrada

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Para calcular el valor de c_i hay que sacar el promedio entre los valore extremos de cada intervalo

$$c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$$

Por lo que la regla del punto medio establece que una integral puede aproximarse por medio de la suma

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \\ &\approx f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + f(c_3)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x \\ &\approx \Delta x\left[f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + \cdots + f(c_n)\right]\end{aligned}$$

Error en la regla del punto medio

Si existe un número $M > 0$ tal que $|f''(x)| \leq M$ para todo valor de x en el intervalo $[a,b]$, entonces el error al aproximar la integral utilizando la regla del punto medio

$$E_m \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2} \; .$$

Para obtener el valor de M será necesario calcular el valor mínimo de la segunda derivada en el intervalo de integración. Lo recomendable es usar una computadora para dibujar la gráfica de la segunda derivada y obtener de la gráfica una estimación de su valor mínimo. De ésta fórmula también se puede calcular el número n que se necesita para que el error sea menor que un error que se ha establecido.

Ejemplo 1: Regla del punto medio

a. Use integración por partes para calcular el valor exacto de la integral

$$\int_{-1}^{2} xe^x \, dx$$

b. Calcula la integral del inciso anterior por la regla del punto medio con $n = 6$. Calcule el valor exacto y el error relativo.

Solución

a. Primero se calculará la integral indefinida usando integración por partes

Hacemos

$$u = x \qquad dv = e^x dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

Al sustituir se obtiene

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

Evaluando la integral para obtener el valor exacto con cuatro decimales

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} xe^x dx &= \left[xe^x - e^x\right]_{-1}^{2} = \left(2e^2 - e^2\right) - \left(-e^{-1} - e^{-1}\right) \\ &= e^2 + 2e^{-1} \\ &= 8.1248\end{aligned}$$

b. Calculando la integral por la regla del punto medio

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{6} = 0.5$$

$$x_0 = -1,$$

$$x_1 = -1 + \Delta x = -1 + 0.5 = -0.5$$

El primer valor para evaluar la función se obtiene sacando el promedio

$$c_1 = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{-1 + (-0.5)}{2} = -0.75$$

Loa valores siguientes se pueden obtener de manera similar, pero es mejor sumar Δx al valor ya calculado

$$
\begin{aligned}
c_2 &= -0.75 + \Delta x = -0.75 + (0.5) = -0.25 \\
c_3 &= -0.25 + \Delta x = -0.25 + (0.5) = 0.25 \\
c_4 &= 0.25 + \Delta x = 0.25 + (0.5) = 0.75 \\
c_5 &= 0.75 + \Delta x = 0.75 + (0.5) = 1.25 \\
c_6 &= 1.25 + \Delta x = 1.25 + (0.5) = 1.75
\end{aligned}
$$

Entonces la integral se aproxima como

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} xe^x dx &\approx \Delta x\left[f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + f(c_4) + f(c_5) + f(c_6)\right] \\
&\approx (0.5)\left[f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)\right] \\
&\approx (0.5)\left[(-0.35437) + (-0.1947) + (0.32101) + (1.5878) + (4.3629) + (10.071)\right] \\
&\approx 7.897
\end{aligned}
$$

El error exacto al usar la regla del punto medio está dado por

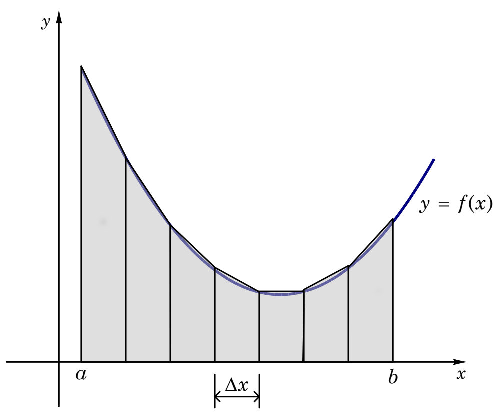
$$
E_m = \left|\int_a^b f(x)dx - M_m\right| = |8.1248 - 7.897| = 0.2278
$$

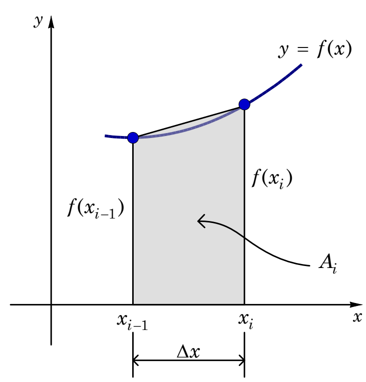
El error relativo se obtiene al dividir el error total entre el valor exacto, para este ejemplo el error relativo es

$$
\varepsilon_r = \frac{E_m}{V_E} = \frac{0.2278}{8.1248} \times 100 = 2.8\%
$$

Regla del trapecio

Como su nombre lo indica la regla del trapecio utiliza trapecios para aproximar el área bajo la curva, cada trapecio tiene como bases $f(x_{i-1})$ y $f(x_i)$, la altura de todos los trapecios es Δx. De tal forma que el área de cada trapecio se puede escribir como





$$
A_i = \frac{1}{2}\Delta x\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right] = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]
$$

De tal forma que al sumar las áreas de los n trapecios, la integral se puede aproximar por medio de la suma

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\\
&\approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{\Delta x}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{\Delta x}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \cdots + \frac{\Delta x}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]\\
&\approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) + f(x_n)]\\
&\approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]\end{aligned}$$

Error en la regla del punto medio

Si existe un número $M > 0$ tal que $|f''(x)| \leq M$ para todo valor de x en el intervalo $[a,b]$, entonces el error al aproximar la integral utilizando la regla del trapecio es

$$E_t \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2} .$$

Para obtener el valor de M será necesario calcular el valor mínimo de la segunda derivada en el intervalo de integración. Lo recomendable es usar una computadora para dibujar la gráfica de la segunda derivada y obtener de la gráfica una estimación de su valor mínimo. De esta fórmula también se puede calcular el número n que se necesita para que el error sea menor que un error que se ha establecido.

Ejemplo 2: Regla de trapecio

Calcula la integral usando la regla del trapecio con $n = 6$. Calcule el valor exacto y el error relativo.

$$\int_{-1}^{2} xe^x \, dx$$

Solución

Calculando la integral por la regla del trapecio con

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{6} = 0.5$$

$$\begin{aligned}x_0 &= -1,\\
x_1 &= -1 + \Delta x = -1 + 0.5 = -0.5\\
x_2 &= -1 + 2\Delta x = -1 + 2(0.5) = 0\\
x_3 &= -1 + 3\Delta x = -1 + 3(0.5) = 0.5\\
x_5 &= -1 + 5\Delta x = -1 + 5(0.5) = 1.5\\
x_4 &= -1 + 4\Delta x = -1 + 4(0.5) = 1.0\\
x_6 &= -1 + 6\Delta x = -1 + 6(0.5) = 2.0\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} xe^x dx &\approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + 2f(x_5) + f(x_6)]\\
&\approx \frac{0.5}{2}[f(-1) + 2f(-0.5) + 2f(0) + 2f(0.5) + 2f(1) + 2f(1.5) + f(2)]\\
&\approx 0.25[-0.368 + 2(-0.303) + 2(0) + 2(0.824) + 2(2.718) + 2(6.722) + 14.778]\\
&\approx 8.5835\end{aligned}$$

Como ya se conoce el valor exacto de la integral, ya que esta se calculo usando integración por partes en el ejemplo anterior.

El error exacto al usar la regla del trapecio está dado por

$$E_T = \left|\int_a^b f(x)dx - T\right|$$

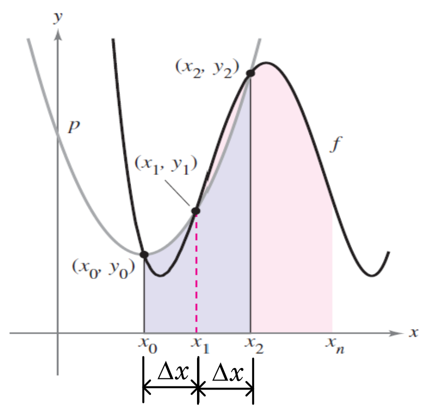
$$E_T = \left|\int_{-1}^2 xe^x dx - T\right| = |8.1248 - 8.5835| = 0.4587$$

El error relativo se obtiene al dividir el error total entre el valor exacto, para este ejemplo el error relativo es

$$\varepsilon_r = \frac{E_T}{V_E} = \frac{0.4587}{8.1248} \times 100 = 5.6\%$$

Regla de Simpson

De los tres métodos estudiados en este tema, la regla de Simpson es la mejor y más exacta. Esto se debe a que utiliza el área bajo una parábola construida cada dos intervalos, como se muestra en la siguiente figura



Se puede demostrar utilizando la integral definida, que el área bajo esta parábola está dada por

$$A_i = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Observe que se construye una parábola por cada dos intervalos, lo que hace necesario que el número n de intervalos sea par.

Entonces la integral, al utilizar la regla de Simpson se puede aproximar por medio de la suma

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Error en la regla del punto medio

Si existe un número $M > 0$ tal que $\left|f^{(5)}(x)\right| \leq M$ para todo valor de x en el intervalo $[a,b]$, entonces el error al aproximar la integral utilizando la regla del trapecio es

$$E_s \leq \frac{M(b-a)^5}{180n^4} \ .$$

Para obtener el valor de M será necesario calcular el valor mínimo de la cuarta derivada en el intervalo de integración. Lo recomendable es usar una computadora para dibujar la gráfica de la cuarta derivada y obtener de la gráfica una estimación de su valor mínimo. De esta fórmula también se puede calcular el número n que se necesita para que el error sea menor que un error que se ha establecido.

Ejemplo 3: Regla de Simpson

Calcula la integral por la regla de Simpson con $n = 6$. Calcule el valor exacto y el error relativo.

$$\int_{-1}^{2} xe^{x}\, dx$$

Solución

Utilizando la regla de Simpson se tiene

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{6} = 0.5$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} xe^{x} dx &\approx \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\right] \\
&\approx \frac{0.5}{3}\left[f(-1) + 4f(-0.5) + 2f(0) + 4f(0.5) + 2f(1) + 4f(1.5) + f(2)\right] \\
&\approx \frac{0.5}{3}\left[-0.367 + 4(-0.303) + 2(0) + 4(0.824) + 2(2.718) + 4(6.722) + 14.778\right] \\
&\approx 8.1368
\end{aligned}$$

El error exacto al calcular una integral por la regla de Simpson es

$$E_S = \left|\int_a^b f(x)dx - S\right|$$

Que para este ejemplo se obtiene

$$E_S = |8.1248 - 8.1368| = 0.012$$

El error relativo se obtiene al dividir el error total entre el valor exacto, para este ejemplo el error relativo es

$$\varepsilon_r = \frac{E_S}{V_E} = \frac{0.012}{8.1248} \times 100 = 0.15\%$$

Como se observa, es mucho menor que el obtenido al usar la regla del trapecio.

Ejemplo 4: Un problema completo

Dada la integral

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x}\, dx$$

a. Use la integración numérica de la computadora para obtener un valor de I.

b. Use el método del punto medio con $n = 10$, para aproximar I.

c. Emplee el método de Simpson con $n = 10$ para aproximar el valor de I.

d. Calcule el error exacto en la regla del punto medio y la regla de Simpson, suponiendo que el resultado del inciso (a) es exacto.

e. Utilice una gráfica para obtener una buena cota superior de $\left|f^{(2)}(x)\right|$.

f. Utilice el resultado del inciso anterior para estimar el error al utilizar la regla del punto medio. Compare el error estimado con el error exacto.

g. Obtenga una buena cota superior de $\left|f^{(4)}(x)\right|$ mediante una gráfica.

h. Utilice el resultado del inciso anterior para estimar el error al utilizar la regla de Simpson. Compare el error estimado con el error exacto.

i. ¿Cuánto debe valer n a fin de garantizar que la magnitud del error cometido al emplear el método de Simpson sea menor que 0.0001?

Solución

a. Al calcular la integral utilizando un programa de cómputo se obtiene el siguiente resultado, que asumiremos que es el valor exacto con siete cifras decimales.

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos x}\, dx = 7.9549265$$

b. Por el método del punto medio para aproximar la integral tenemos

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\, dx = \Delta x\left[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + f(\bar{x}_3) + \cdots + f(\bar{x}_n)\right]$$

donde $n = 10,\qquad \Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2\pi - 0}{10} = \dfrac{\pi}{5}$

Como los valores de $\bar{x}$ a evaluar se localizan en el punto medio de cada intervalo se obtiene

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{\frac{\pi}{5} - 0}{2} = \frac{\pi}{10}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\pi}{10} + \Delta x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\pi}{10} + 2\Delta x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{10}$$

y así sucesivamente. Usando el programa para evaluar la suma tenemos.

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \approx \frac{\pi}{5}\left[f\left(\frac{\pi}{10}\right) + f\left(\frac{3\pi}{10}\right) + f\left(\frac{5\pi}{10}\right) + f\left(\frac{7\pi}{10}\right) + f\left(\frac{9\pi}{10}\right) + f\left(\frac{11\pi}{10}\right) + f\left(\frac{13\pi}{10}\right) + f\left(\frac{15\pi}{10}\right) + f\left(\frac{17\pi}{10}\right) + f\left(\frac{19\pi}{10}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\, dx &\approx \frac{\pi}{5}[2.5884 + 1.7999 + 1.0 + 0.5555 + 0.3863 + 0.3863 + 0.5555 \\ &\quad +1.0 + 1.7999 + 2.5884] \\ &\approx 7.95464\end{aligned}$$

c. Calculemos la integral utilizando el método de Simpson con $n = 10$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\, dx = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

donde $n = 10,\qquad \Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2\pi - 0}{10} = \dfrac{\pi}{5}$

$$x_0 = a = 0$$

$$x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 0 + \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

$$x_3 = a + 3\Delta x = 0 + \frac{3\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$$

y así sucesivamente, entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\, dx \approx \frac{\pi}{15}\left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{5}\right) + 2f\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 2f\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 4f(\pi) + 2f\left(\frac{6\pi}{5}\right) + 4f\left(\frac{7\pi}{5}\right) + 2f\left(\frac{8\pi}{5}\right) + 4f\left(\frac{9\pi}{5}\right) + f(2\pi)\right]$$

$$\approx \frac{\pi}{15}[2.7185 + 4(2.2457) + 2(1.3621) + 4(0.7342) + 2(0.44529) + 4(0.36788) + 2(0.44529) + 4(0.73417) + 2(1.36208) + 4(2.24570) + 2.71829]$$

$$\approx \frac{\pi}{15}[2.7185 + 8.9828 + 2.7242 + 2.9368 + 0.89058 + 1.47152 + 0.89058 + 2.93668 + 2.72416 + 8.9828 + 2.71829]$$

$$\approx 7.95379$$

d. El error exacto al utilizar la regla del punto medio es

$$E_M = |I_M - I| = |7.95464 - 7.9549265| = 0.0002865$$

Mientras que el error exacto al utilizar la regla de Simpson es

$$E_S = |I_S - I| = |7.95379 - 7.9549265| = 0.0011$$

e. Para calcular el error exacto es necesario conocer el valor exacto de la integral. Si la integral no se puede calcular utilizando técnicas de integración, es imposible conocer su valor exacto y el error exacto no se podrá calcular.

El error cometido al utilizar la regla del punto medio se puede estimar utilizando la expresión

$$|E_M| \le \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

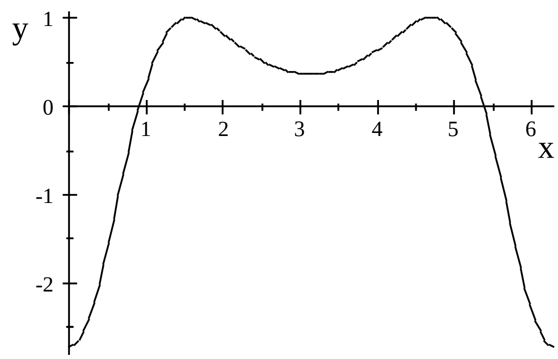
En donde n es el número de particiones y K es una cota superior de la segunda derivada de la función en el intervalo $[a,b]$

El problema de estimar el error es que a menudo es muy difícil calcular a mano la segunda derivada y obtener una buena cota superior K de $|f''(x)|$. Pero los sistemas algebraicos por computadora no tienen problema en calcular derivadas y graficarlas; así es posible determinar con facilidad, un valor para la cota superior K utilizando un programa matemático.

Calculando la segunda derivada con un programa y dibujando la gráfica

$$f''(x) = -(\cos x)e^{\cos x} + e^{\cos x} - e^{\cos x}\cos^2 x$$

La gráfica de la segunda derivada en el intervalo $[0,2\pi]$ es



A partir de la gráfica, se obtiene que el valor máximo está en $x = 0$ y es

$$|f''(0)| = \left|-(\cos(0))e^{\cos(0)} + e^{\cos(0)} - e^{\cos(0)}\cos^2(0)\right| = e$$

f. El error estimado utilizando la regla del punto medio se estima como

$$|E_M| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2} = \frac{e(2\pi - 0)^3}{24(10)^2} = \frac{8e\pi^3}{2400} = 0.2809$$

g. El error estimado por el método de Simpson es

$$|E_S| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

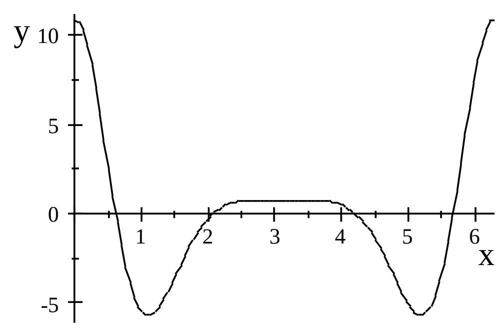
En donde n es el número de particiones y K es una cota superior de la cuarta derivada de la función en el intervalo $[a,b]$

El problema de estimar el error es que a menudo es muy difícil calcular a mano la cuarta derivada y obtener una buena cota superior K de $\left|f^{(4)}(x)\right|$. Pero los sistemas algebraicos por computadora no tienen problema en calcular derivadas y graficarlas; así es posible determinar con facilidad, un valor para la cota superior K utilizando un programa matemático.

Calculando la cuarta derivada, utilizando un programa de computo se obtiene

$$f^{(4)}(x) = -5(\cos x)e^{\cos x} - 3e^{\cos x} + 5\left(\cos^2 x\right)e^{\cos x} + 6\left(\cos^3 x\right)e^{\cos x} + e^{\cos x}\cos^4 x$$

Se dibuja ahora la gráfica de la cuarta derivada en el intervalo $[0, 2\pi]$ para obtener una cota superior para el error por el método de Simpson



Se observa que el valor más grande de la cuarta derivada es en $x = 0$ y está dado por

$$f^{(4)}(0) = -5(\cos(0))e^{\cos(0)} - 3e^{\cos(0)} + 5(\cos^2(0))e^{\cos(0)} + 6(\cos^3(0))e^{\cos(0)} + e^{\cos(0)}\cos^4(0)$$

$$= 4e$$

$$\approx 10.9$$

h. el error estimado en la regla de Simpson es

$$|E_S| \le \frac{K(b-a)^5}{180n^4} = \frac{4e(2\pi-0)^5}{180(10)^4} = \frac{128e\pi^5}{1800000} = 0.0592$$

i. Para obtener el valor de n, de tal forma que se obtenga la exactitud deseada, se procede como se muestra a continuación

$$|E_S| \le \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

$$\frac{K(b-a)^5}{180n^4} \le 0.0001$$

$$\frac{4e(2\pi-0)^5}{180n^4} \le 0.0001$$

$$\frac{128e\pi^5}{180n^4} \le 0.0001$$

$$\frac{128e\pi^5}{180(0.0001)} \le n^4$$

$$n \ge \sqrt[4]{\frac{128e\pi^5}{180(0.0001)}}$$

$$n \ge 49.32$$

De donde se obtiene que $n \ge 50$ para que el error sea menor que 0.0001

Ejercicios sobre integración aproximada

1. Calcule la siguiente integral utilizando la regla de Simpson con $n = 6$

$$\int_0^{\pi} \frac{sen\ x}{x+\pi}\, dx$$

2. Use la regla del trapecio para obtener una aproximación a la integral con $n = 8$

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx$$

3. a. Use una aproximación por la regla de Simpson para la integral, con $n = 6$.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}\, dx$$

b. Utilice el teorema fundamental del cálculo para calcular el valor exacto de la integral

4. Use la regla de Simpson para obtener una aproximación a la integral dada, con el número de $n = 4$.

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx$$

5. Calcule la siguiente integral utilizando:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x\, dx$$

a. Teorema fundamental del cálculo.

b. Método de Simpson $n = 4$ y 4 decimales.

6. Use la regla de Simpson para obtener la aproximación de la integral, con $n = 4$ y 4 decimales:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\sqrt{2x}\,dx$$

7. Utilice la regla del punto medio para encontrar un valor aproximado de la integral

$$\int_1^2 \sqrt{x^3-1}\,dx$$

con $n = 6$, usando 4 cifras decimales.

8. Utilice la regla del trapecio con $n = 6$ para calcular en forma aproximada el valor de la integral

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

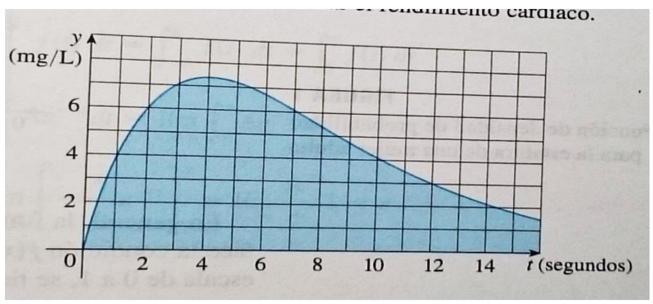
9. Utilice la regla del trapecio con $n = 6$ para calcular en forma aproximada la integral. Verifique su respuesta utilizando el teorema fundamental del cálculo.

$$\int_0^1 x\,\operatorname{sen}(x^2)dx$$

10. Utilice la regla del punto medio con $n = 6$ para calcular en forma aproximada la integral. Verifique su respuesta utilizando el teorema fundamental del cálculo.

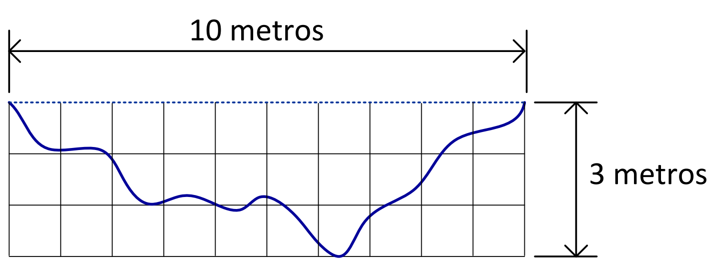
$$\int_0^1 x\,\operatorname{sen}(x^2)dx$$

11. Use integración aproximada para calcular el área de la región sombreada en la siguiente figura. Utilice la regla del trapecio con $n = 8$



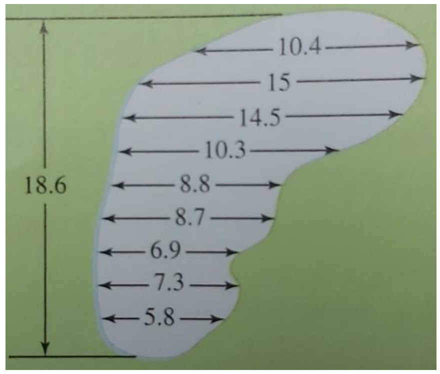
12. Obtenga el área de un semicírculo de radio 2 centrado en el origen, usando el método de aproximación de la regla de Punto medio con $n = 6$ y cuatro decimales.

13. Para calcular el caudal de un rio, es necesario aproximar el área de su sección transversal, la cual se muestra en la siguiente figura, en donde las medidas están en metros.



Utilice la regla de Simpson para aproximar el área de la sección transversal con $n = 10$

14. Para calcular el volumen de agua en un estanque para peses de 4 pies de profundidad, se han hecho las mediciones que se muestran en la figura. Todas las mediciones están en pies.



Utilice la regla de Simpson para calcular el área del espejo de agua en el estanque.