2.4 Fracciones parciales

OBJETIVOS

- Calcular integrales de funciones racionales utilizando la descomposición en sus fracciones parciales.

Para calcular la integral de una función racional

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinomiales, se debe seguir el procedimiento siguiente

1. Si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $Q(x)$ se debe efectuar la división de polinomios de tal forma que la función quede expresada en la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Si el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$ pasar directamente al paso 2.

2. Descomponer la función racional en fracciones parciales e integrar cada una de las fracciones resultantes utilizando los métodos conocidos. Los diferentes casos para la descomposición enfracciones parciales se indican a continuación

Fracciones parciales

Para descomponer una fracción propia en fracciones parciales se factoriza el denominador y se expresa como un producto de factores lineales de la forma $(ax+b)$ o factores cuadráticos irreducibles (no factorizables en los reales) de la forma (ax^2+bx+c). Luego se construyen las fracciones parciales según el caso correspondiente

Caso 1: Factores lineales no repetidos

Para cada factor lineal en el denominador no repetido, de la forma $(ax+b)$, la descomposición en fracciones parciales debe contener una fracción

$$\frac{A}{ax+b}$$

Por ejemplo, la función racional mostrada, se descompone de la forma indicada

$$\frac{2x^2-9}{x(x-3)(2x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{2x+1}$$

Observe que todos los factores del denominador son lineales y ninguno es repetido, es decir que ninguno de ellos se encuentra elevado a una potencia entera positiva mayor que 1. Para determinar los valores de las constantes hay varios procedimientos que se ilustran en los ejemplos de este tema. La idea central es desarrollar las operaciones algebraicas en el lado derecho, simplificar en términos de las constantes y luego igualar los numeradores. Como los numeradores deben ser iguales, es posible construir ecuaciones lineales que permiten obtener los valores de las constantes.

Ejemplo 1: Factores lineales no repetidos

Calcule la integral

$$\int \frac{4x-5}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$$

Solución

Esta integral se debe calcular utilizando fracciones parciales. Como la fracción es propia, se procede a factorizar el polinomio en el denominador

$$\begin{aligned} 2x^3-5x^2-3x &= x(2x^2-5x-3) \\ &= x(x-3)(2x+1) \end{aligned}$$

Como el denominador tiene solo factores lineales no repetidos, la descomposición en fracciones parciales es la siguiente

$$\begin{aligned} \frac{4x-5}{2x^3-5x^2-3x} &= \frac{4x-5}{x(x-3)(2x+1)} \\ &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{2x+1} \end{aligned}$$

Para establecer los valores de las constantes se desarrolla la suma de fracciones en el lado derecho y se igualan los numeradores

$$\begin{aligned} \frac{4x-5}{2x^3-5x^2-3x} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{2x+1} \\ &= \frac{A(x-3)(2x+1)+B(x)(2x+1)+C(x)(x-3)}{x(x-3)(2x+1)} \end{aligned}$$

Como las fracciones son iguales, los numeradores deben ser iguales

$$4x-5 = A(x-3)(2x+1)+B(x)(2x+1)+C(x)(x-3)$$

Cuando los factores son lineales y no repetidos, la forma mas sencilla de encontrar los valores de las constantes consiste en asignar valores a x, de tal forma que se anulen algunos factores y se pueda despejar el valor de una constante.

Si $x = 0$

$$\begin{aligned} 4x-5 &= A(x-3)(2x+1)+B(x)(2x+1)+C(x)(x-3) \\ 4(0)-5 &= A(0-3)(0+1)+B(0)(0+1)+C(0)(0-3) \\ -5 &= A(-3)(1) \\ A &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Si $x = 3$

$$\begin{aligned} 4x-5 &= A(x-3)(2x+1)+B(x)(2x+1)+C(x)(x-3) \\ 4(3)-5 &= A(3-3)(6+1)+B(3)(6+1)+C(3)(3-3) \\ 7 &= B(3)(7) \\ B &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Si $x = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 4x - 5 &= A(x-3)(2x+1) + B(x)(2x+1) + C(x)(x-3) \\ 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 5 &= A\left(-\frac{1}{2} - 3\right)(-1+1) + B\left(-\frac{1}{2}\right)(-1+1) + C\left(-\frac{1}{2}\right)(-\frac{1}{2} - 3) \\ -7 &= C\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right) \\ C &= \frac{(-7)(4)}{(7)} = -4 \end{aligned}$$

Al sustituir los valores de las constantes se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{4x-5}{2x^3 - 5x^2 - 3x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{2x+1} \\ &= \frac{5}{3x} + \frac{1}{3(x-3)} - \frac{4}{2x+1} \end{aligned}$$

Calculando la integral

$$\begin{aligned} \int \frac{4x-5}{2x^3 - 5x^2 - 3x}\,dx &= \int \left(\frac{5}{3x} + \frac{1}{3(x-3)} - \frac{4}{2x+1} \right) dx \\ &= \frac{5}{3}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-3}\,dx - 4\int \frac{1}{2x+1}\,dx \\ &= \frac{5}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-3| - 4\frac{\ln|2x+1|}{2} + c \\ &= \frac{5}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-3| - 2\ln|2x+1| + c \end{aligned}$$

Caso 2: Factores lineales repetidos

Para cada factor lineal repetido n veces en el denominador de la forma $(ax+b)^n$, la descomposición en fracciones parciales debe contener la suma de n fracciones de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Por ejemplo, la función racional mostrada, se descompone de la forma indicada

$$\frac{2x^2 - 9}{x^3(x-3)^2(2x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-3} + \frac{E}{(x-3)^2} + \frac{F}{2x+1}$$

Ejemplo 2: Factores lineales repetidos

Calcule la integral

$$\int \frac{5x^2 - 33x + 54}{(x-2)(x-4)^2}\,dx$$

Solución

Esta integral se debe calcular utilizando fracciones parciales. Como la fracción es propia, se procede a descomponer la fracción en sus fracciones parciales

El denominador tiene solo factores lineales, con un factor lineal repetido. La descomposición en fracciones parciales es de la forma siguiente

$$\frac{5x^2 - 33x + 54}{(x-2)(x-4)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}$$

Para establecer los valores de las constantes se desarrolla la suma de fracciones en el lado derecho y se igualan los numeradores

$$\begin{aligned}\frac{5x^2 - 33x + 54}{(x-2)(x-4)^2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}\\ &= \frac{A(x-4)^2 + B(x-2)(x-4) + C(x-2)}{(x-2)(x-4)^2}\end{aligned}$$

Como las fracciones son iguales, los numeradores deben ser iguales

$$5x^2 - 33x + 54 = A(x-4)^2 + B(x-2)(x-4) + C(x-2)$$

Cuando los factores son lineales, una forma sencilla de encontrar los valores de las constantes consiste en asignar valores a x, de tal forma que se anulen algunos factores y se pueda despejar el valor de una constante.

Si $x = 4$

$$\begin{aligned}5x^2 - 33x + 54 &= A(x-4)^2 + B(x-2)(x-4) + C(x-2)\\ 5(4)^2 - 33(4) + 54 &= A(4-4)^2 + B(4-2)(4-4) + C(4-2)\\ 2 &= 2C\\ C &= 1\end{aligned}$$

Si $x = 2$

$$\begin{aligned}5x^2 - 33x + 54 &= A(x-4)^2 + B(x-2)(x-4) + C(x-2)\\ 5(2)^2 - 33(2) + 54 &= A(2-4)^2 + B(2-2)(2-4) + C(2-2)\\ 8 &= 4A\\ A &= 2\end{aligned}$$

Para encontrar el valor de B podemos asignar cualquier otro valor a x

Si $x = 0$

$$\begin{aligned}5(0)^2 - 33(0) + 54 &= A(0-4)^2 + B(0-2)(0-4) + C(0-2)\\ 54 &= 16A + 8B - 2C\\ B &= \frac{54 - 16A + 2C}{8} = \frac{54 - 16(2) + 2(1)}{8}\\ B &= 3\end{aligned}$$

Al sustituir los valores de las constantes se obtiene

$$\frac{5x^2 - 33x + 54}{(x-2)(x-4)^2} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-4} + \frac{1}{(x-4)^2}$$

Calculando la integral

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2 - 33x + 54}{(x-2)(x-4)^2}\,dx &= \int\left(\frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-4)} + \frac{1}{(x-4)^2}\right)dx \\ &= 2\int \frac{1}{x-2}\,dx + 3\int \frac{1}{x-4}\,dx + \int (x-4)^{-2}\,dx \\ &= 2\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{(x-4)^{-1}}{-1} + c \\ &= 2\ln|x-2| + 3\ln|x-4| - \frac{1}{(x-4)} + c\end{aligned}$$

Caso 3: Factores cuadráticos no repetidos

Para cada factor cuadrático irreducible no repetido en el denominador, de la forma $(ax^2 + bx + c)$, la descomposición en fracciones parciales debe contener un factor de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Por ejemplo, la función racional mostrada, se descompone de la forma indicada

$$\frac{2x^2 - 9}{x^2(x^2+4)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2+4} + \frac{Ex + F}{x^2 + x + 1}$$

Ejemplo 3: Factores cuadráticos no repetidos

Calcule la integral

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$$

Solución

Esta integral se debe calcular utilizando fracciones parciales. Como el grado del numerador es igual que el grado del denominador, lo primero que se debe hacer es la división de polinomios

Al desarrollar productos en el denominador se tiene

$$\begin{aligned}(x-1)^2(x^2+1) &= (x^2 - 2x + 1)(x^2+1) \\ &= x^4 + x^2 - 2x^3 - 2x + x^2 + 1 \\ &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1\end{aligned}$$

Ahora se procede a realizar la división de polinomios para obtener el cociente y el residuo. El resultado de la división es el siguiente

$$\begin{aligned}\frac{x^4 + 3x^2 - 4x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} &= 1 + \frac{2x^3 + x^2 - 2x + 3}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} \\ &= 1 + \frac{2x^3 + x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)}\end{aligned}$$

Ahora se procede a descomponer en fracciones parciales la fracción propia resultante. Observe que uno de los factores es lineal repetido mientras que el otro es un factor cuadrático irreducible

$$\frac{2x^3 + x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1}$$

Simplificando la suma de fracciones en el lado derecho y agrupando los términos que tienen la variable con el mismo exponente

$$\frac{2x^3+x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A(x-1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$= \frac{A(x^3-x^2+x-1)+Bx^2+B+(Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2xD+D)}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}$$

$$= \frac{Ax^3-Ax^2+Ax-A+Bx^2+B+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2xD+D}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}$$

$$= \frac{(A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(A+C-2D)x+(-A+B+D)}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2}$$

Igualando los numeradores de las fracciones se tiene

$$2x^3+x^2-2x+3 = (A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(A-2D+C)x+(-A+B+D)$$

Como los polinomios son iguales, los coeficientes de potencias iguales tienen que ser iguales. Al igualar los coeficientes se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A+C &= 2 \\ -A+B-2C+D &= 1 \\ A+C-2D &= -2 \\ -A+B+D &= 3 \end{aligned}$$

Al resolver por sustituciones el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} A+C-2D &= -2 \\ 2-2D &= -2 \\ -2D &= -4 \\ D &= 2 \end{aligned}$$

Como $D = 2$

$$\begin{aligned} -A+B+D &= 3 \\ -A+B &= 3-D \\ -A+B &= 3-2 \\ -A+B &= 1 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} -A+B-2C+D &= 1 \\ 1-2C+D &= 1 \\ -2C &= -D \\ -2C &= -2 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Calculando A

$$\begin{aligned} A+C &= 2 \\ A &= 2-C = 2-1 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

Solamente hace falta calcular B

$$-A + B + D = 3$$
$$B = 3 - D + A = 3 - 2 + 1$$
$$B = 2$$

La descomposición en fracciones parciales es la siguiente

$$\frac{2x^3 + x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x+2}{x^2+1}$$

Ahora se puede calcular la integral

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 - 4x + 4}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int\left(1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x+2}{x^2+1}\right)dx$$
$$= \int dx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{x+2}{x^2+1}dx$$
$$= x + \ln(x-1) + \int 2(x-1)^{-2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{2}{x^2+1}dx$$
$$= x + \ln(x-1) + \frac{2(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + 2\tan^{-1}x + c$$
$$= x + \ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + 2\tan^{-1}x + c$$

Caso 4: Factores cuadráticos repetidos

Para cada factor cuadrático irreducible repetido en el denominador, de la forma $(ax^2+bx+c)^n$, la descomposición en fracciones parciales debe contener una suma de factor de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{\left(ax^2 + bx + c\right)^2} + \frac{A_3x + B_3}{\left(ax^2 + bx + c\right)^3} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{\left(ax^2 + bx + c\right)^n}$$

Por ejemplo, la función racional mostrada, se descompone de la forma indicada

$$\frac{2x^2 - 9}{(x^2+4)^2(x^2+x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1}$$

Ejemplo 4: Factores cuadráticos repetidos

Calcule la integral

$$\int \frac{(x^4 - 2x^3 - 27)}{x(x^2+9)^2}\,dx$$

Solución

Esta integral se debe calcular utilizando fracciones parciales. Como el grado del numerador es menor que el del denominador, la fracción es propia.

Observe que el denominador tiene un factor lineal y un factor cuadrático repetido, por lo que la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 27}{x(x^2+9)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+9} + \frac{Dx+E}{(x^2+9)^2}$$

Desarrollando la suma de fracciones en el lado derecho

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 27}{x(x^2+9)^2} = \frac{A(x^2+9)^2 + (Bx+C)(x)\left(x^2+9\right) + (Dx+E)(x)}{x(x^2+9)^2}$$

Igualando los numeradores de las dos fracciones se tiene

$$x^4 - 2x^3 - 27 = A(x^2+9)^2 + (Bx+C)(x)\left(x^2+9\right) + (Dx+E)(x)$$

Para encontrar los valores de las constantes, cuando hay factores cuadráticos irreducibles es mejor desarrollar los productos e igualar los coeficientes de los términos con las mismas potencias en los polinomios, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
x^4 - 2x^3 - 27 &= A(x^2+9)^2 + (Bx+C)(x)\left(x^2+9\right) + (Dx+E)(x) \\
x^4 - 2x^3 - 27 &= A(x^4+18x^2+81) + (Bx+C)(x^3+9x) + Dx^2 + Ex \\
x^4 - 2x^3 - 27 &= Ax^4 + 18Ax^2 + 81A + Bx^4 + Cx^3 + 9Bx^2 + 9Cx + Dx^2 + Ex \\
x^4 - 2x^3 - 27 &= (A+B)x^4 + Cx^3 + (18A+9B+D)x^2 + (9C+E)x + 81A
\end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes del polinomio en el lado izquierdo con los del polinomio en el lado derecho, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
1 &= A + B \\
-2 &= C \\
0 &= 18A + 9B + D \\
0 &= 9C + E \\
-27 &= 81A
\end{aligned}$$

De la última ecuación se obtiene que

$$A = \frac{-27}{81} = -\frac{1}{3}$$

De la primera ecuación se obtiene que

$$B = 1 - A = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

De la segunda ecuación se tiene

$$C = -2$$

De la tercera ecuación

$$D = -18A - 9B = -18\left(-\frac{1}{3}\right) - 9\left(\frac{4}{3}\right) = 6 - 12 = -6$$

La última constante se obtiene de la cuarta ecuación

$$E = -9C = -9(-2) = 18$$

La descomposición en fracciones parciales queda de la forma siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{x^4 - 2x^3 - 27}{x(x^2+9)^2} &= -\frac{1}{3x} + \frac{\frac{4}{3}x - 2}{x^2+9} + \frac{-6x+18}{(x^2+9)^2} \\
&= -\frac{1}{3x} + \frac{4x-6}{3(x^2+9)} - \frac{6x-18}{(x^2+9)^2}
\end{aligned}$$

Para calcular la integral total se descompone el problema en 3 integrales, como se indica a continuación

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 - 27}{x(x^2+9)^2}\,dx = -\underbrace{\int \frac{1}{3x}\,dx}_{1} + \underbrace{\int \frac{4x-6}{3(x^2+9)}\,dx}_{2} - \underbrace{\int \frac{6x-18}{(x^2+9)^2}\,dx}_{3}$$

Calculando la integral 1

$$\int \frac{1}{3x}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x|$$

Calculando la integral 2

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-6}{3(x^2+9)}\,dx &= \frac{4}{3}\int \frac{x}{(x^2+9)}\,dx - 2\int \frac{1}{(x^2+9)}\,dx \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{2x}{(x^2+9)}\,dx - 2\int \frac{1}{(x^2+9)}\,dx \\ &= \frac{2}{3}\ln\left|x^2+9\right| - \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\end{aligned}$$

Calculando la integral 3

$$\begin{aligned}\int \frac{6x-18}{(x^2+9)^2}\,dx &= \int \frac{6x}{(x^2+9)^2}\,dx - \int \frac{18}{(x^2+9)^2}\,dx \\ &= 3\int (x^2+9)^{-2}(2x)\,dx - 18\int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx \\ &= \frac{3(x^2+9)^{-1}}{-1} - 18\int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx\end{aligned}$$

La integral de la derecha necesita una sustitución trigonométrica

$$x = 3\tan\theta$$

$$dx = 3\sec^2\theta d\theta$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx &= \int \frac{3\sec^2\theta}{\left(9\tan^2\theta+9\right)^2}\,d\theta = \int \frac{3\sec^2\theta}{81\left(\sec^2\theta\right)^2}\,d\theta \\ &= \frac{1}{27}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,d\theta = \frac{1}{27}\int \cos^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{27}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{54}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right) \\ &= \frac{1}{54}\theta + \frac{1}{54}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &= \frac{1}{54}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{54}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\cdot\frac{3}{\sqrt{x^2+9}} \\ &= \frac{1}{54}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{18(x^2+9)}\end{aligned}$$

Sustituyendo los resultados de 1, 2 y 3 se obtiene la respuesta del problema

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-2x^3-27}{x(x^2+9)^2}dx &= -\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln\left|x^2+9\right| - \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \left(\frac{1}{54}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x}{18(x^2+9)}\right) + c \\ &= -\frac{1}{3}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln\left|x^2+9\right| - \frac{37}{54}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x}{18(x^2+9)} + c\end{aligned}$$

Ejercicios sobre fracciones parciales

En los ejercicios siguientes, calcule la integral que involucra funciones trigonométricas

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x}$

3. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}dx$

4. $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x^2+x}dx$

5. $\displaystyle\int \frac{5x^2-3x+18}{9x-x^3}dx$

6. $\displaystyle\int \frac{4-x}{x^4-x^2}dx$

7. $\displaystyle\int \frac{x+6}{x^4-x^2}dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4)^2}$

10. $\displaystyle\int \frac{x+6}{x^4+4x^2}dx$

11. $\displaystyle\int \frac{6x}{x^3-8}dx$

12. $\displaystyle\int \frac{6x}{x^3+8}dx$

13. $\displaystyle\int \frac{x+6}{x^4+9x^2}dx$

14. $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x^2+x}dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}dx$

16. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}dx$

17. $\displaystyle\int \frac{2x+2}{(x^2+1)(x-1)^3}dx$

18. $\displaystyle\int \frac{x^4+81}{x(x^2+9)^2}dx$

19. $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+37}{x^3-2x^2+9x-18}dx$

20. $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x+25}{x^3-3x^2+4x-12}dx$

Calcule la siguiente integral utilizando fracciones parciales, sin determinar el valor de las constantes

21. $\displaystyle\int \frac{x^7}{x^2(x^2+1)^2}dx$

22. $\displaystyle\int \frac{x^8}{x^3(x^2+4)^2}dx$