2.3 Sustitución trigonométrica

OBJETIVOS

- Calcular integrales utilizando la técnica de sustitución trigonométrica.

En esta sección se estudian las integrales que contienen expresiones de la forma

$$a^2 - u^2\,, \qquad a^2 + u^2\,, \qquad u^2 - a^2$$

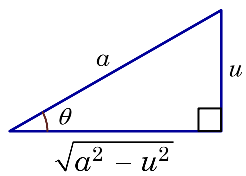
Usualmente estas expresiones se encuentran elevadas a una potencia racional positiva o negativa.

Caso 1

Para calcular una integral que contiene

$$a^2 - u^2$$

Se construye un triángulo rectángulo en donde a es la hipotenusa, u es el cateto opuesto y θ es el ángulo agudo. Al calcular el cateto adyacente por medio del teorema de Pitágoras se obtiene $\sqrt{a^2 - u^2}$, como se muestra en la figura siguiente



Al relacionar el cateto opuesto con la hipotenusa se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{a}$$

Despejando u, la integral se puede resolver haciendo la sustitución

$$u = a\operatorname{sen}\theta$$

El diferencial du correspondiente es

$$du = a\cos\theta\, d\theta$$

Una vez calculada la integral en términos del ángulo θ será necesario utilizar las siguientes expresiones para expresar la integral en términos de la variable inicial u

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{a}, \qquad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right), \ \cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\ , \qquad \tan\theta = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

Ejemplo 1: Integración por sustitución trigonométrica

Calcule la integral

$$\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$$

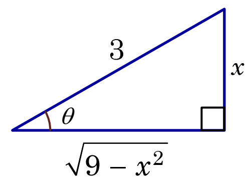
Solución

Esta es una integral que se presenta frecuentemente en los cálculos matemáticos ya que puede representar el área de una semicircunferencia de radio 3 cuando los límites de integración van de -3 a 3

Como se puede observar la integral tiene una expresión de la forma

$$a^2 - u^2 = (3)^2 - x^2$$

x y 3 se pueden representar como lados de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura siguiente



El cateto adyacente se obtiene utilizando el teorema de Pitágoras. La sustitución a realizar se puede obtener fácilmente utilizando razones trigonométricas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}$$
$$x = 3\operatorname{sen}\theta$$

Calculando el diferencial dx

$$dx = 3\cos\theta\, d\theta$$

Sustituyendo x y dx en la integral propuesta se obtendrá una integral que solo contiene funciones trigonométricas

$$\begin{aligned}\int\sqrt{9-x^2}\,dx &= \int\sqrt{9-(3\operatorname{sen}\theta)^2}\,(3\cos\theta\, d\theta)\\ &= 3\int\sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\theta}\,\cos\theta\, d\theta)\\ &= 3\int\sqrt{9(1-\operatorname{sen}^2\theta)}\,\cos\theta\, d\theta)\end{aligned}$$

Utilizando la identidad trigonométrica

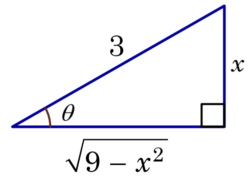
$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{9-x^2}\,dx &= 3\int\sqrt{9(\cos^2\theta)}\,\cos\theta\, d\theta)\\ &= 3\int 3\cos\theta\cos\theta\, d\theta)\\ &= 9\int\cos^2\theta\, d\theta\end{aligned}$$

La integral trigonométrica se calcula por la fórmula de reducción de potencias

$$\begin{aligned}\int\sqrt{9-x^2}\,dx &= 9\int\cos^2\theta\, d\theta\\ &= 9\int\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,d\theta\\ &= \frac{9}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right)+c\\ &= \frac{9}{2}\theta+\frac{9}{4}\operatorname{sen}2\theta+c\\ &= \frac{9}{2}\theta+\frac{9}{4}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)+c\\ &= \frac{9}{2}\theta+\frac{9}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+c\end{aligned}$$

Ahora solo hace falta expresar la respuesta en términos de x. Para ello podemos utilizar algunas identidades y recurrir nuevamente al triángulo rectángulo, de donde se obtiene que



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}, \qquad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right), \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

Efectuando las sustituciones

$$\begin{aligned}\int\sqrt{9-x^2}\,dx &= \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{9}{2}\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right)+c\\ &= \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+c\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Integración por sustitución trigonométrica completando cuadrados

Calcule la integral

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}}dx$$

Solución

Para calcular esta integral primero se debe completar cuadrados en la expresión dentro del radical y luego utilizar sustitución trigonométrica.

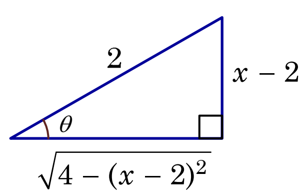
Completando cuadrados se tiene:

$$\begin{aligned}4x-x^2 &= -(x^2-4x)\\ &= -(x^2-4x+4)+4\\ &= -(x-2)^2+4\\ &= 4-(x-2)^2\end{aligned}$$

Entonces

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{4x-x^2}}dx = \int\frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx$$

Ahora por sustitución trigonométrica, se tiene una expresión de la forma a^2-u^2 donde $a=2$ y $u=x-2$. El dos se coloca en la hipotenusa del triángulo y $x-2$ en el cateto opuesto. El cateto adyacente se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x-2}{2}$$
$$2\operatorname{sen}\theta = x-2$$
$$x = 2\operatorname{sen}\theta + 2$$

Calculando el diferencial

$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

En este punto del problema ya se puede sustituir x y dx para expresar la integral én términos de funciones trigonométricas como en el ejemplo 1.

Aquí ilustraremos otra forma de hacerlo. Del triángulo rectángulo se tiene que

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{4-(x-2)^2}}{2}$$
$$2\cos\theta = \sqrt{4-(x-2)^2}$$

Es decir que podemos sustituir directamente $2\cos\theta$, por la expresión en el denominador de la integral. Haciendo las sustituciones se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx &= \int \frac{(2\operatorname{sen}\theta+2)^2}{2\cos\theta}2\cos\theta d\theta \\
&= \int (4\operatorname{sen}^2\theta + 8\operatorname{sen}\theta + 4)d\theta \\
&= 4\int \operatorname{sen}^2\theta + 8\int \operatorname{sen}\theta d\theta + 4\int d\theta \\
&= 4\int \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta + 8\int \operatorname{sen}\theta d\theta + 4\int d\theta \\
&= 2\int d\theta - 2\int \cos 2\theta d\theta + 8\int \operatorname{sen}\theta d\theta + 4\int d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx &= 2\theta - 2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta - 8\cos\theta + 4\theta + c \\
&= 6\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 8\cos\theta + c
\end{aligned}$$

Del triángulo rectángulo se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x-2}{2} \quad \text{entonces} \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right), \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{4-(x-2)^2}}{2}$$

Entonces

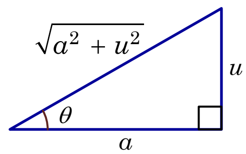
$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{4-(x-2)^2}}dx &= 6\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 8\cos\theta + c \\
&= 6\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - 2\left(\frac{x-2}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4-(x-2)^2}}{2}\right) - 8\left(\frac{\sqrt{4-(x-2)^2}}{2}\right) + c \\
&= 6\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} - 4\sqrt{4-(x-2)^2} + c \\
&= 6\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{4-(x-2)^2} + \sqrt{4-(x-2)^2} - 4\sqrt{4-(x-2)^2} + c \\
&= 6\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{4-(x-2)^2} - 3\sqrt{4-(x-2)^2} + c \\
&= 6\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{4x-x^2} - 3\sqrt{4x-x^2} + c
\end{aligned}$$

Caso 2

Para calcular una integral que contiene

$$a^2 + u^2$$

Se construye un triángulo rectángulo en donde a es la hipotenusa, u es el cateto opuesto y θ es el ángulo agudo. Al calcular la hipotenusa por el teorema de Pitágoras se obtiene $\sqrt{a^2 + u^2}$, como se muestra en la figura siguiente



Al relacionar el cateto opuesto con el cateto adyacente se obtiene

$$\tan\theta = \frac{u}{a}$$

Despejando u, la integral se puede resolver haciendo la sustitución

$$u = a\tan\theta$$

El diferencial du correspondiente es

$$du = a\sec^2\theta\, d\theta$$

Una vez calculada la integral en términos del ángulo θ será necesario utilizar las siguientes expresiones para que la integral quede en términos de la variable inicial u

$$\tan\theta = \frac{u}{a}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right), \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{u}{\sqrt{a^2 + u^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}}$$

Ejemplo 3: Integración por sustitución trigonométrica

Calcule la integral

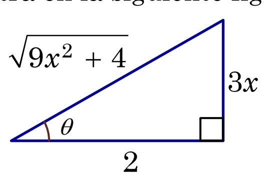
$$\int \frac{dx}{(9x^2 + 4)^2}$$

Solución

La integral puede expresarse como

$$\int \frac{dx}{\left[(3x)^2 + 4\right]^2}$$

La integral tiene una expresión de la forma $a^2 + u^2$ donde $a = 2$ y $u = 3x$. En este caso $3x$ se coloca en el cateto opuesto del triángulo y 2 en el cateto adyacente. La sustitución a utilizar es $u = a\tan\theta$. La hipotenusa se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\tan\theta = \frac{3x}{2}$$
$$2\tan\theta = 3x$$
$$x = \frac{2}{3}\tan\theta$$
$$dx = \frac{2}{3}\sec^2\theta\, d\theta$$

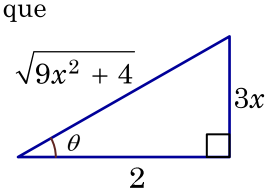
Sustituyendo x y dx y simplificando la integral resultante

$$\int\frac{dx}{(9x^2+4)^2} = \int\frac{\frac{2}{3}\sec^2\theta\, d\theta}{\left(9\left(\frac{2}{3}\tan\theta\right)^2+4\right)^2} = \frac{2}{3}\int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\left(9\left(\frac{4}{9}\tan^2\theta\right)+4\right)^2}$$
$$= \frac{2}{3}\int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\left(4\tan^2\theta+4\right)^2} = \frac{2}{3}\int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{16\left(\tan^2\theta+1\right)^2}$$
$$= \frac{1}{24}\int\frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\left(\sec^2\theta\right)^2} = \frac{1}{24}\int\frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}d\theta$$
$$= \frac{1}{24}\int\frac{1}{\sec^2\theta}d\theta$$
$$= \frac{1}{24}\int\cos^2\theta\, d\theta$$

La integral de potencias trigonométricas resultante se calcula fácilmente

$$\int\frac{dx}{(9x^2+4)^2} = \frac{1}{24}\int\cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{24}\int\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{48}\left(\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right)+c$$
$$= \frac{1}{48}\theta+\frac{1}{96}\operatorname{sen}2\theta+c$$
$$= \frac{1}{48}\theta+\frac{1}{96}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)+c$$
$$= \frac{1}{48}\theta+\frac{1}{48}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+c$$

Del triángulo rectángulo se tiene que



$$\tan\theta = \frac{3x}{2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3x}{\sqrt{9x^2+4}}, \qquad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{9x^2+4}}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(9x^2+4)^2} &= \frac{1}{48}\theta + \frac{1}{48}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + c\\ &= \frac{1}{48}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{1}{48}\cdot\frac{3x}{\sqrt{9x^2+4}}\cdot\frac{2}{\sqrt{9x^2+4}} + c\\ &= \frac{1}{48}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{1}{48}\cdot\frac{6x}{9x^2+4} + c\\ &= \frac{1}{48}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{x}{8(9x^2+4)} + c\end{aligned}$$

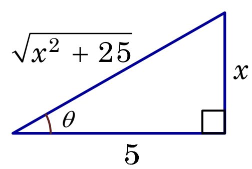
Ejemplo 4: Integración por sustitución trigonométrica

Calcule la integral

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}\,dx$$

Solución

La integral tiene una expresión de la forma a^2+u^2 donde $a=5$ y $u=x$. En este caso x se coloca en el cateto opuesto del triángulo y 5 en el cateto adyacente. La sustitución a utilizar es $u = a\tan\theta$. La hipotenusa se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{x}{5}\\ x &= 5\tan\theta\\ dx &= 5\sec^2\theta\, d\theta\end{aligned}$$

Observe que

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+25}}{5}, \text{ entonces } \sqrt{x^2+25} = 5\sec\theta$$

Sustituyendo x, $\sqrt{x^2+25}$ y dx se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}\,dx &= \int \frac{(5\tan\theta)^3\left(5\sec^2\theta\, d\theta\right)}{5\sec\theta}\\ &= 125\int \frac{\tan^3\theta\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta\\ &= 125\int \tan^3\theta\sec\theta\, d\theta\end{aligned}$$

La integral de potencias trigonométricas resultante se calcula haciendo la sustitución

$$\begin{aligned}u &= \sec\theta\\ du &= \sec\theta\tan\theta\, d\theta\end{aligned}$$

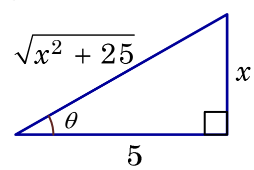
$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}dx &= 125\int \tan^3\theta\sec\theta d\theta \\ &= 125\int \tan^2\theta\tan\theta\sec\theta d\theta \\ &= 125\int\left(\sec^2\theta-1\right)\sec\theta\tan\theta d\theta \\ &= 125\int\left(u^2-1\right)du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}dx &= 125\int\left(u^2-1\right)du \\ &= 125\left(\frac{1}{3}u^3-u\right)+c\end{aligned}$$

Expresando la respuesta en términos de funciones trigonométricas con $u = \sec\theta$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}dx = 125\left(\frac{1}{3}\sec^3\theta-\sec\theta\right)+c$$

Finalmente se debe expresar la repuesta en términos de x, para ello nos apoyamos nuevamente en el triángulo rectángulo



$$\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+25}}{5}$$

Entonces

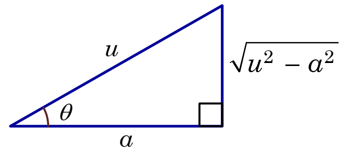
$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}}dx &= 125\left(\frac{1}{3}\sec^3\theta-\sec\theta\right)+c \\ &= \frac{125}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2+25}}{5}\right)^3-125\left(\frac{\sqrt{x^2+25}}{5}\right)+c \\ &= \frac{1}{3}\left(x^2+25\right)^{3/2}-25\sqrt{x^2+25}+c\end{aligned}$$

Caso 3

Para calcular una integral que contiene

$$u^2-a^2$$

Se construye un triángulo rectángulo en donde u es la hipotenusa, a es el cateto opuesto y θ es el ángulo agudo. Al calcular el cateto opuesto por el teorema de Pitágoras se obtiene $\sqrt{u^2-a^2}$, como se muestra en la figura siguiente



Al relacionar el cateto adyacente con la hipotenusa

$$\sec\theta = \frac{u}{a}$$

Despejando *u,* la integral se puede resolver haciendo la sustitución

$$u = a\sec\theta$$

El diferencial du correspondiente es

$$du = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

Una vez calculada la integral en términos del ángulo θ será necesario utilizar las siguientes expresiones para que la integral quede en términos de la variable inicial u

$$\sec\theta = \frac{u}{a}, \qquad \theta = \sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right), \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a}\ , \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}$$

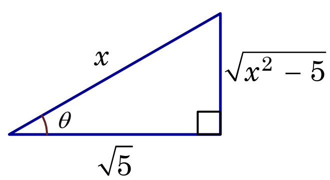
Ejemplo 5: Integración por sustitución trigonométrica

Calcule la integral

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 5}}{x^2} dx$$

Solución

La integral tiene una expresión de la forma $u^2 - a^2$ donde $a = \sqrt{5}$ y $u = x$. En este caso x se coloca en la hipotenusa $\sqrt{5}$ en el cateto adyacente. La sustitución a utilizar es $u = a\sec\theta$. El cateto opuesto se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\sec\theta = \frac{x}{\sqrt{5}}$$

$$x = \sqrt{5}\sec\theta$$

$$dx = \sqrt{5}\sec\theta\tan\theta d\theta$$

Al sustituir x y dx para obtener una integral con funciones trigonométricas

$$\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{\left(\sqrt{5}\sec\theta\right)^2-5}}{\left(\sqrt{5}\sec\theta\right)^2}\sqrt{5}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \sqrt{5}\int \frac{\sqrt{5\sec^2\theta-5}}{5\sec^2\theta}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{\sqrt{5(\sec^2\theta-1)}}{\sec\theta}\tan\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{\sqrt{5\tan^2\theta}}{\sec\theta}\tan\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{\sqrt{5}\tan\theta}{\sec\theta}\tan\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta}d\theta$$

La integral de potencias trigonométricas resultante se calcula utilizando la identidad trigonométrica

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^2}dx = \int \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta}d\theta$$

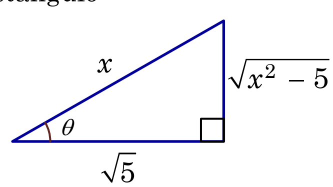
$$= \int \frac{\sec^2\theta-1}{\sec\theta}d\theta$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta - \int \frac{1}{\sec\theta}d\theta$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta - \int \cos\theta\, d\theta$$

$$= \ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right| - \operatorname{sen}\theta + c$$

Finalmente se debe expresar la repuesta en términos de x, para ello nos apoyamos nuevamente en el triángulo rectángulo



$$\sec\theta = \frac{x}{\sqrt{5}}, \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{x^2+5}}{x}$$

Entonces

$$\int \frac{\sqrt{x^2-5}}{x^2}dx = \ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right| - \operatorname{sen}\theta + c$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{5}}{x}+\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}\right| - \frac{\sqrt{x^2+5}}{x} + c$$

Ejemplo 6: Integración por sustitución trigonométrica

Calcule la integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}} dx$$

Solución

Como la expresión dentro del radical tiene un polinomio cuadrático, lo primero que hay que hacer es completar el cuadrado

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x - 8 &= 4(x^2 + x) - 8 \\ &= 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 8 - 1 \\ &= 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 9 \end{aligned}$$

Entonces la integral inicial puede expresarse como

$$\int \frac{x}{\sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 9}} dx$$

Al hacer una sustitución inicial

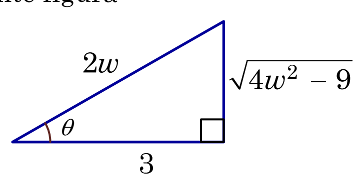
$$w = x + \frac{1}{2}$$

$$dw = dx$$

La integral queda expresada en términos de w como

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 4x - 8}} dx &= \int \frac{w - \frac{1}{2}}{\sqrt{4w^2 - 9}} dw \\ &= \int \frac{w - \frac{1}{2}}{\sqrt{(2w)^2 - 9}} dw \end{aligned}$$

La integral tiene una expresión de la forma $u^2 - a^2$ donde $a = 3$ y $u = 2w$. En este caso $2w$ se coloca en la hipotenusa 3 en el cateto adyacente. La sustitución a utilizar es $u = a\sec\theta$. El cateto opuesto se calcula por el teorema de Pitágoras, como se muestra en la siguiente figura



Del triángulo mostrado en la figura se tiene:

$$\sec\theta = \frac{2w}{3}$$

$$3\sec\theta = 2w$$

$$dw = \frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta d\theta$$

Al sustituir w y dw para obtener una integral con funciones trigonométricas

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+4x-8}}dx = \int \frac{w-\frac{1}{2}}{\sqrt{(2w)^2-9}}dw = \int \frac{\frac{3}{2}\sec\theta-\frac{1}{2}}{\sqrt{(3\sec\theta)^2-9}}\frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{3\sec\theta-1}{\sqrt{9\sec^2\theta-9}}\frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\, d\theta = \frac{3}{4}\int \frac{3\sec\theta-1}{\sqrt{9(\sec^2\theta-1)}}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{3\sec\theta-1}{3\sqrt{\tan^2\theta-1}}\sec\theta\tan\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{3\sec\theta-1}{\tan\theta}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

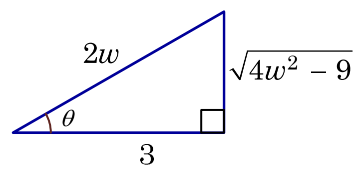
$$= \frac{1}{4}\int (3\sec\theta-1)\sec\theta\, d\theta = \frac{3}{4}\int \sec^2\theta\, d\theta - \frac{1}{4}\int \sec\theta\, d\theta$$

Las dos integrales resultantes se calculan utilizando las fórmulas de integración correspondientes

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+4x-8}}dx = \frac{3}{4}\int \sec^2\theta\, d\theta - \frac{1}{4}\int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\tan\theta - \frac{1}{4}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

Utilizando el triángulo rectángulo para obtener las funciones trigonométricas en términos de w



$$\tan\theta = \frac{\sqrt{4w^2-9}}{3}, \qquad \sec\theta = \frac{2w}{3}$$

La integral queda expresada en términos de w como

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+4x-8}}dx = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{4w^2-9}}{3} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2w}{3}+\frac{\sqrt{4w^2-9}}{3}\right| + c$$

$$= \frac{\sqrt{4w^2-9}}{4} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2w+\sqrt{4w^2-9}}{3}\right| + c$$

Finalmente se debe expresar la repuesta en términos de x. Como $w = x+\frac{1}{2}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+4x-8}}dx = \frac{\sqrt{4w^2-9}}{4} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2w+\sqrt{4w^2-9}}{3}\right| + c$$

$$= \frac{\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-9}}{4} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-9}}{3}\right| + c$$

$$= \frac{\sqrt{4x^2+4x-8}}{4} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x+1+\sqrt{4x^2+4x-8}}{3}\right| + c$$

Ejercicios sobre sustitución trigonométrica

En los ejercicios siguientes, calcule la integral que involucra funciones trigonométricas

1. $\int \frac{\sqrt{16+x^2}}{x^2}dx$

2. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}dx$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

4. $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$

5. $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

6. $\int \frac{dx}{(x^2-9)^{3/2}}$

7. $\int \sqrt{x^2+5}\,dx$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{36-x^2}}$

9. $\int \frac{dx}{x\sqrt{36-x^2}}$

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$

11. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$

12. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^{5/2}}$

13. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx$

14. $\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx$

15. $\int \sqrt{6x-x^2}\,dx$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}$

17. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{9+x^2}}$

18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{16+x^4}}$

19. $\int \frac{\sqrt{16-e^{2x}}}{e^x}dx$

20. $\int \frac{e^{-t}}{(9e^{-2t}+4)^{3/2}}\,dt$

21. $\int \frac{e^t}{\left(e^{2t}+8e^t+7\right)^{3/2}}\,\mathrm{dt}$

22. $\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}}$

23. $\int \frac{x^3}{\sqrt{16+x^2}}dx$

24. $\int \frac{x^3}{\sqrt{25+x^2}}dx$

25. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+5}}\,dx$

26. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+6x-7}}\,dx$

27. $\int \frac{x}{\left(x^2+8x+25\right)^{3/2}}dx$

28. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-10x+21}}dx$

29. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+8x+7}}dx$

30. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$

32. $\int \frac{\ln^3 x\,dx}{x\sqrt{\ln^2 x-4}}$

33. $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$

34. $\int_1^3 \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}}$

35. $\int_4^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

36. $\int_0^5 x^2\sqrt{25-x^2}\,dx$