

2.2 Integrales trigonométricas

OBJETIVOS

- Calcular integrales que contienen potencias de las funciones seno y coseno.
- Calcular integrales que contienen potencias de las funciones tangente y secante.
- Calcular integrales que contienen potencias de las funciones cotangente y cosecante.

Caso 1

Para calcular una integral de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

En donde al menos una de las dos potencias es una potencia impar, se procede de la forma siguiente

- a. Si m es una potencia impar se debe descomponer como

$$\operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen}^{m-1} x \operatorname{sen} x$$

Ahora el exponente de la función seno es par, y se puede utilizar la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Para expresar la potencia $\operatorname{sen}^{m-1} x$ en términos de cosenos y luego hacer la sustitución $u = \cos x$

- b. Si n es una potencia impar se debe descomponer como

$$\cos^n x = \cos^{n-1} x \cos x$$

Ahora el exponente de la función coseno es par, y se puede utilizar la identidad trigonométrica

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

Para expresar la potencia $\cos^{n-1} x$ en términos de senos y luego hacer la sustitución $u = \operatorname{sen} x$

Ejemplo 1: Integración de potencias impares de senos y cosenos

Calcule la integral

$$\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^3 2x \, dx$$

Solución

Esta es una integral de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

En donde n es una potencia impar, por lo tanto, hay que descomponer la potencia impar y en la forma $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cos x$, utilizar la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y hacer la sustitución $u = \operatorname{sen} x$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 2x \cos^3 2x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 2x \cos^2 2x \cos 2x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^2 2x (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x \, dx \\ &= \int (\operatorname{sen}^2 2x - \operatorname{sen}^4 2x) \cos 2x \, dx \end{aligned}$$

Ahora se puede hacer la sustitución

$$u = \operatorname{sen} 2x$$

$$du = 2 \cos 2x \, dx$$

$$\frac{1}{2} du = \cos 2x \, dx$$

Obteniéndose

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 2x \cos^3 2x \, dx &= \int (u^2 - u^4) \left(\frac{1}{2} du \right) \\ &= \frac{1}{2} \int (u^2 - u^4) \, du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) + c \\ &= \frac{1}{6} u^3 - \frac{1}{10} u^5 + c \end{aligned}$$

Como $u = \operatorname{sen} 2x$, la respuesta del problema es

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 2x \cos^3 2x \, dx &= \frac{1}{6} (\operatorname{sen} 2x)^3 - \frac{1}{10} (\operatorname{sen} 2x)^5 + c \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{sen}^3 2x - \frac{1}{10} \operatorname{sen}^5 2x + c \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Integración de potencias impares de senos y cosenos

Calcule la integral

$$\int \operatorname{sen}^5 \pi x \, dx$$

Solución

Esta es una integral de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

En donde m es una potencia impar y n es igual a cero, que se puede tomar como potencia par, por lo tanto, hay que descomponer la potencia impar en la forma $\operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen}^{m-1} x \operatorname{sen} x$, utilizar la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y hacer la sustitución $u = \cos x$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^5 \pi x \, dx &= \int \operatorname{sen}^4 \pi x \operatorname{sen} \pi x \, dx \\ &= \int (\operatorname{sen}^2 \pi x)^2 \operatorname{sen} \pi x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 \pi x)^2 \operatorname{sen} \pi x \, dx \end{aligned}$$

Ahora se puede hacer la sustitución

$$u = \cos \pi x$$

$$du = -\pi \operatorname{sen} \pi x \, dx$$

$$-\frac{1}{\pi} du = \operatorname{sen} \pi x \, dx$$

Obteniéndose

$$\begin{aligned}\int \sin^5 \pi x \, dx &= \int (1 - u^2)^2 \left(-\frac{1}{\pi} du\right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right) + c\end{aligned}$$

Como $u = \cos \pi x$, la respuesta del problema es

$$\begin{aligned}\int \sin^5 \pi x \, dx &= -\frac{1}{\pi} \left(\cos \pi x - \frac{2}{3} \cos^3 \pi x + \frac{1}{5} \cos^5 \pi x\right) + c \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos \pi x + \frac{2}{3\pi} \cos^3 \pi x - \frac{1}{5\pi} \cos^5 \pi x + c\end{aligned}$$

Ejemplo 3: Integral por partes con exponencial natural

Calcule la integral

$$\int \frac{\cos^3 t}{\sqrt[3]{\sin t}} \, dt$$

Solución

Aunque en este problema aparece una potencia racional, al involucrar únicamente potencias de senos y cosenos con un exponente impar, el problema se puede resolver como en los ejemplos 1 y 2

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

En donde n es una potencia impar y m es una potencia fraccionaria negativa, por lo tanto, hay que descomponer la potencia impar en la forma $\cos^n x = \cos^{n-1} \cos x$, utilizar la identidad $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ y hacer la sustitución $u = \sin x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 t}{\sqrt[3]{\sin t}} \, dt &= \int (\sin t)^{-1/3} \cos^3 t \, dt \\ &= \int (\sin t)^{-1/3} \cos^2 t \cos t \, dt \\ &= \int (\sin t)^{-1/3} (1 - \sin^2 t) \cos t \, dt \\ &= \int \left[(\sin t)^{-1/3} - (\sin t)^{5/3} \right] \cos t \, dt\end{aligned}$$

Ahora se puede hacer la sustitución

$$u = \sin t$$

$$du = \cos t \, dt$$

Obteniéndose

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 t}{\sqrt[3]{\sin t}} dt &= \int (\sin t)^{-1/3} \cos^3 t dt \\ &= \int [u^{-1/3} - u^{5/3}] du \\ &= \frac{u^{2/3}}{\frac{2}{3}} - \frac{u^{8/3}}{\frac{8}{3}} + c \\ &= \frac{3}{2} u^{2/3} - \frac{3}{8} u^{8/3} + c\end{aligned}$$

Como $u = \sin t$, la respuesta del problema es

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 t}{\sqrt[3]{\sin t}} dt &= \frac{3}{2} (\sin t)^{2/3} - \frac{3}{8} (\sin t)^{8/3} + c = \frac{3}{2} (\sin t)^{2/3} \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 t\right) + c \\ &= \frac{3(\sin t)^{2/3} (4 - \sin^2 t)}{8} + c\end{aligned}$$

Caso 2

Para calcular una integral de la forma

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

En donde m y n son potencias pares, se procede de la forma siguiente

- a. Utilizar las siguientes identidades para reducir las potencias

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

- b. Desarrolle los productos y simplifique de tal manera de obtener la suma de varias integrales, es posible que en algunas integrales haya que usar nuevamente las identidades de reducción de potencias o bien que sea necesario utilizar el caso 1

Ejemplo 4: Integral trigonométrica con potencias pares

Calcule la integral

$$\int \cos^4 x dx$$

Solución

Cuando una integral de potencias de senos y cosenos tiene solamente exponentes pares, hay que utilizar las siguientes identidades para reducir las potencias

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Al utilizar estas identidades para resolver el problema se tiene

$$\begin{aligned}
 \int \cos^4 x \, dx &= \int (\cos^2 x)^2 \, dx \\
 &= \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right]^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx
 \end{aligned}$$

Observe que dentro del paréntesis aparece $\cos^2 2x$, razón por la cual hay que utilizar nuevamente la identidad de reducción de potencias, ahora expresada como

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right) \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x \right) \, dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x \right) \, dx
 \end{aligned}$$

Las tres integrales que aparecen dentro del paréntesis son sencillas y se pueden calcular directamente

$$\begin{aligned}
 \int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}x + \frac{2\sin 2x}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 4x}{4} \right) + c \\
 &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c
 \end{aligned}$$

Ejemplo 5: Integral trigonométrica con potencias pares

Calcule la integral

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$$

Solución

Cuando una integral de potencias de senos y cosenos tiene solamente exponentes pares, hay que utilizar las siguientes identidades para reducir las potencias

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \text{y} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Al utilizar estas identidades para resolver el problema se tiene

$$\begin{aligned}
 \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \, dx \\
 &= \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right]^2 \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right] \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + \cos 2x - 2\cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx \\
 &= \underbrace{\frac{1}{8} \int dx}_1 - \underbrace{\frac{1}{8} \int \cos 2x \, dx}_2 - \underbrace{\frac{1}{8} \int \cos^2 2x \, dx}_3 + \underbrace{\frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx}_4
 \end{aligned}$$

La primera y la segunda integral se calculan directamente, para calcular la tercera integral es necesario utilizar nuevamente la identidad de reducción de potencias

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Calculando la integral 3

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} \int \cos^2 2x \, dx &= \frac{1}{8} \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \, dx \\
 &= \frac{1}{16} \int (1 + \cos 4x) \, dx \\
 &= \frac{1}{16} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \\
 &= \frac{1}{16} x + \frac{1}{64} \sin 4x
 \end{aligned}$$

La cuarta integral tiene una potencia impar, por lo que se calcula utilizando la técnica de los primeros 3 ejemplos resueltos

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx &= \frac{1}{8} \int \cos^2 2x \cos 2x \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx
 \end{aligned}$$

Ahora se puede hacer la sustitución

$$\begin{aligned}
 u &= \sin 2x \\
 du &= 2 \cos 2x \, dx \\
 \frac{1}{2} du &= \cos 2x \, dx
 \end{aligned}$$

La integral 4 se calcula como

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx &= \frac{1}{8} \int (1 - u^2) \left(\frac{1}{2} du \right) \\
 &= \frac{1}{16} \int (1 - u^2) \, du \\
 &= \frac{1}{16} \left(u - \frac{1}{3} u^3 \right) \\
 &= \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{48} \sin^3 2x
 \end{aligned}$$

Reemplazando los resultados de las integrales 3 y 4 y calculando las integrales 1 y 2 se obtiene la respuesta del problema

$$\begin{aligned}
 \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \left(\frac{\sin 2x}{2} \right) - \left(\frac{1}{16} x + \frac{1}{64} \sin 4x \right) + \left(\frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{48} \sin^3 2x \right) + c \\
 &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + c \\
 &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + c
 \end{aligned}$$

Caso 3

Para calcular una integral de la forma

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$$

En donde n es una potencia par y m puede ser potencia par impar o racional

- a. Descomponer la potencia par m de la siguiente forma

$$\sec^m x = \sec^{m-2} x \sec^2 x$$

- b. Utilice la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para expresar $\sec^{m-2} x$ en términos de $\tan x$.
 c. Hacer la sustitución $u = \tan x$ ya que el diferencial es $du = \sec^2 x \, dx$

Para calcular una integral de la forma

$$\int \cot^m x \csc^n x \, dx$$

En donde n es una potencia par y m puede ser potencia par impar o racional

- a. Descomponer la potencia par m de la siguiente forma

$$\csc^m x = \csc^{m-2} x \csc^2 x$$

- b. Utilice la identidad $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ para expresar $\csc^{m-2} x$ en términos de $\cot x$.
 c. Hacer la sustitución $u = \cot x$ ya que el diferencial es $du = -\csc^2 x \, dx$

Ejemplo 6: Integral trigonométrica con tangentes y secantes

Calcule la integral

$$\int \tan^4 x \sec^4 x \, dx$$

Solución

Cuando en una integral de potencias de tangentes y secantes, la función secante tiene exponente par, el problema se resuelve descomponiendo la potencia de la función secante en dos partes. La primera para obtener el diferencial $\sec^2 x \, dx$, la otra potencia de la secante se convierte a la función tangente utilizando la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ y luego se realiza la sustitución $u = \tan x$.

Al seguir el procedimiento descrito se tiene que

$$\begin{aligned} \int \tan^4 x \sec^4 x \, dx &= \int \tan^4 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^4 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx \\ &= \int (\tan^4 x + \tan^6 x) \sec^2 x \, dx \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución

$$u = \tan x$$

$$du = \sec^2 x \, dx$$

Se obtiene una integral que se calcula fácilmente

$$\begin{aligned}
 \int \tan^4 x \sec^4 x \, dx &= \int (u^4 + u^6) \, du \\
 &= \frac{1}{5} u^5 + \frac{1}{7} u^7 + c \\
 &= \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{7} \tan^7 x + c
 \end{aligned}$$

Caso 4

Para calcular una integral de la forma

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$$

En donde m es una potencia impar y n puede ser potencia par impar o racional

- a. Descomponer la potencia impar m de la siguiente forma

$$\tan^m x = \tan^{m-1} x \tan x, \text{ donde } m-1 \text{ es par}$$

- b. Descomponer la otra potencia como

$$\sec^n x = \sec^{n-1} x \sec x$$

- c. Utilice la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expresar $\tan^{m-1} x$ en términos de $\sec x$.
- d. Hacer la sustitución $u = \sec x$ ya que el diferencial es $du = \sec x \tan x \, dx$

Para calcular una integral con las funciones $\cot x$ y $\csc x$ el procedimiento es equivalente, solo que se utiliza la identidad

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

Ejemplo 7: Integral trigonométrica con cotangentes y cosecantes

Calcule la integral

$$\int \cot^3 2x \csc^3 2x \, dx$$

Solución

Las integrales que contienen potencia se cotangentes y cosecantes se calculan con los mismos procedimientos que se utilizan para las potencias de tangentes y secantes. Cuando la función cotangente tiene exponente impar se deben descomponer las potencias para obtener el diferencial $\cot x \csc x \, dx$, luego la potencia que queda de la función cotangente se convierte a cosecantes utilizando la identidad $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ y finalmente se hace la sustitución $u = \csc x$

Al seguir el procedimiento descrito se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int \cot^3 2x \csc^3 2x \, dx &= \int \cot^2 2x \csc^2 2x \csc 2x \cot 2x \, dx \\
 &= \int (\csc^2 2x - 1) \csc^2 2x \csc 2x \cot 2x \, dx
 \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución

$$u = \csc 2x$$

$$du = -2 \csc 2x \cot 2x \, dx$$

$$-\frac{1}{2} du = \csc 2x \cot 2x \, dx$$

Se obtiene una integral que se calcula fácilmente

$$\begin{aligned} \int \cot^3 2x \csc^3 2x \, dx &= \int (u^2 - 1)u^2 \left(-\frac{1}{2} du\right) \\ &= -\frac{1}{2} \int (u^4 - u^2) \, du \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) + c \\ &= \frac{u^3}{6} - \frac{u^5}{10} + c \end{aligned}$$

Sustituyendo $u = \csc 2x$ se obtiene la respuesta del problema

$$\int \cot^3 2x \csc^3 2x \, dx = \frac{\csc^3 2x}{6} - \frac{\csc^5 2x}{10} + c$$

Ejemplo 8: Integral trigonométrica con cotangentes y cosecantes

Calcule la integral

$$\int \cot^5 x \, dx$$

Solución

Observe que esta integral contiene solo la potencia de la cotangente. Aunque no aparece la función cosecante, como la cotangente tiene potencia impar, el problema se puede resolver de forma parecida al ejemplo 7.

Cuando la función cotangente tiene exponente impar se deben descomponer las potencias para obtener el diferencial $\cot x \csc x \, dx$, luego la potencia que queda de la función cotangente se convierte a cosecantes utilizando la identidad $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ y finalmente se hace la sustitución $u = \csc x$

Al seguir el procedimiento descrito se tiene que

$$\begin{aligned} \int \cot^5 x \, dx &= \int \cot^4 x \cot x \, dx \\ &= \int (\cot^2 x)^2 \cot x \, dx \\ &= \int (\csc^2 x - 1)^2 \cot x \, dx \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución

$$\begin{aligned} u &= \csc x \\ du &= -\csc x \cot x \, dx \\ -\frac{du}{\csc x} &= \cot x \, dx \\ -\frac{du}{u} &= \cot x \, dx \end{aligned}$$

Al sustituir en la integral se obtiene

$$\begin{aligned}\int \cot^5 x \, dx &= \int (\csc^2 x - 1)^2 \cot x \, dx \\ &= \int (u^2 - 1)^2 \left(-\frac{du}{u}\right) = -\int \left(\frac{u^4 - 2u^2 + 1}{u}\right) du \\ &= -\int \left(u^3 - 2u + \frac{1}{u}\right) du = -\left(\frac{u^4}{4} - \frac{2u^2}{2} + \ln|u|\right) + c\end{aligned}$$

Finalmente sustituimos

$$\begin{aligned}u &= \csc x \\ \int \cot^5 x \, dx &= -\left(\frac{u^4}{4} - \frac{2u^2}{2} + \ln|u|\right) + c \\ &= -\frac{1}{4}\csc^4 x + \csc^2 x - \ln|\csc x| + c\end{aligned}$$

Caso 5

Para calcular una integral de la forma

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$$

En donde m es una potencia par y n es una potencia impar, se sugiere utilizar integración por partes como se muestra en el último ejemplo

Ejemplo 9: Integral trigonométrica con cotangentes y cosecantes

Calcule la integral

$$\int \sec^3 2x \, dx$$

Solución

Observe que esta integral contiene solo la potencia de la secante y el exponente no es par. En este problema no se puede utilizar ninguno de los procedimientos utilizados en los ejemplos anteriores y se debe utilizar una estrategia diferente.

El problema se resuelve utilizando integración por partes, como se muestra a continuación

$$\int \sec^3 2x \, dx = \int \sec^2 2x \sec 2x \, dx$$

Haciendo

$$u = \sec 2x$$

$$du = 2 \sec 2x \tan 2x \, dx$$

$$dv = \sec^2 2x \, dx$$

$$v = \frac{1}{2} \tan 2x$$

Aplicando la integración por partes

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 2x \, dx &= \int \sec^2 2x \sec 2x \, dx \\
&= uv - \int v \, du \\
&= (\sec 2x) \left(\frac{1}{2} \tan 2x \right) - \int \left(\frac{1}{2} \tan 2x \right) (2 \sec 2x \tan 2x) \, dx \\
&= \frac{1}{2} \sec 2x \tan 2x - \int \tan^2 2x \sec 2x \, dx \\
&= \frac{1}{2} \sec 2x \tan 2x - \int (\sec^2 2x - 1) \sec 2x \, dx \\
\int \sec^3 2x \, dx &= \frac{1}{2} \sec 2x \tan 2x - \int \sec^3 2x \, dx + \int \sec 2x \, dx
\end{aligned}$$

Observe que en el lado derecho se repite la integral que se está calculando. Se debe trasladar al lado izquierdo de la igualdad para despejarla.

$$2 \int \sec^3 2x \, dx = \frac{1}{2} \sec 2x \tan 2x + \int \sec 2x \, dx$$

La integral en el lado derecho se calcula directamente por las fórmulas de integración

$$\begin{aligned}
2 \int \sec^3 2x \, dx &= \frac{1}{2} \sec 2x \tan 2x + \frac{1}{2} \ln |\sec 2x + \tan 2x| + c \\
\int \sec^3 2x \, dx &= \frac{1}{4} \sec 2x \tan 2x + \frac{1}{4} \ln |\sec 2x + \tan 2x| + c
\end{aligned}$$

Ejercicios sobre integrales de potencias trigonométricas

En los ejercicios siguientes, calcule la integral que involucra funciones trigonométricas

- | | |
|---|--|
| 1. $\int \sin^2 2x \, dx$ | 2. $\int \sin^5 5x \, dx$ |
| 3. $\int \csc^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx$ | 4. $\int \tan^2 \left(\frac{x}{3} \right) dx$ |
| 5. $\int \frac{1}{\sec^2 x} dx$ | 6. $\int \sin^2 2\theta \cos^5 2\theta$ |
| 7. $\int \tan^5 2x \cdot \sec 2x \cdot dx$ | 8. $\int \tan^5 3x \cdot \sec 3x \cdot dx$ |
| 9. $\int \frac{\sec^4 2x}{\tan^4 2x} dx$ | 10. $\int \frac{\sec^4 3x}{\tan^5 3x} dx$ |
| 11. $\int \frac{\tan^3 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta$ | 12. $\int \frac{\tan^3 \theta}{\sec^3 \theta} d\theta$ |
| 13. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$ | 14. $\int \frac{\sec^6 \theta}{\tan^2 \theta} d\theta$ |
| 15. $\int \cos^3 2x \, dx$ | 16. $\int \cos^4 2x \, dx$ |
| 17. $\int \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{\sin \theta}} d\theta$ | 18. $\int \frac{\cos^3 \theta}{\sin^3 \theta} d\theta$ |
| 19. $\int \cos^6 3x \, dx$ | 20. $\int \cot^5 3x \, dx$ |
| 21. $\int \tan^5 \pi x \, dx$ | 22. $\int \csc^4 \pi x \, dx$ |

$$23. \int \tan^5 3x \cdot \sec^2 3x \cdot dx$$

$$25. \int \sec^5 2x dx$$

$$27. \int \frac{\cot x + \csc x}{\sen x} dx$$

$$29. \int \frac{\cot x + \csc^2 x}{\sen^2 x} dx$$

$$31. \int x \sen x \cos x dx$$

$$33. \int \sen 2x \cos 3x dx$$

$$35. \int \sen 3x \sen 6x dx$$

$$24. \int \frac{\sec^4 \theta}{\tan^2 \theta} d\theta$$

$$26. \int \frac{\tan x + \sen x}{\sec x} dx$$

$$28. \int \frac{\cot x + \csc^2 x}{1 - \cos^2 x} dx$$

$$30. \int \frac{\cot \theta}{\sen^2 \theta} d\theta$$

$$32. \int x \cos^2 x \sen x dx$$

$$34. \int \cos 5x \cos 7x dx$$

$$36. \int \sen 4x \cos x dx$$