2.1 Integración por partes

OBJETIVOS

- Utilizar la técnica de integración por partes para calcular integrales indefinidas.
- Utilizar la técnica de integración por partes para calcular integrales definidas.

Integración por partes

La técnica de integración por partes se utiliza para calcular la integral de funciones que contienen productos y divisiones, particularmente es muy útil para integrales que contienen productos de funciones polinomiales con exponenciales, productos de exponenciales con trigonométricas, productos con funciones logarítmicas, productos con funciones trigonométricas inversas.

Recuerde que la derivada de un producto es

$$D_x\left[f(x)g(x)\right] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Al integrar ambos lados de la ecuación se tiene

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$$

Por el teorema fundamental del cálculo la integral del lado izquierdo se cancela con la derivada, entonces

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx$$

Despejando el primer término del lado derecho se obtiene

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Esta es la fórmula para calcular integrales por integración por partes. Para que sea más fácil de recordar se hace la sustitución

$$\begin{aligned} u &= f(x) \qquad & dv &= g'(x)dx \\ du &= f'(x)dx \qquad & v &= g(x) \end{aligned}$$

Obteniéndose la fórmula

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Recomendaciones para calcular una integral por partes

1. Elegir dv de tal forma que su integral sea relativamente sencilla, pero que incluya la mayor cantidad de elementos en la integral, pero que se pueda calcular utilizando a lo sumo una técnica de sustitución directa.
2. Se recomienda elegir u de tal forma que su derivada du no sea complicada, pues se utilizará para calcular la integral resultante.
3. Se sugiere que, al utilizar integración por partes, el orden de prioridad para seleccionar u sea: primero trigonométricas inversas, segundo lugar logarítmicas, tercer lugar las potencias, cuarto lugar las trigonométricas y las exponenciales.

Ejemplo 1: Integración por partes

Calcule la integral

$$\int x\cos 2x\,dx$$

Solución

La integración por partes establece que

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Se debe elegir u de tal forma que su derivada sea sencilla. Por otro lado, dv debe ser tal que se pueda integrar con cierta facilidad. No se recomienda por ejemplo que u sea un producto o un cociente ya que su derivada es complicada

Al hacer

$$u = x\ ,$$

dv tiene que ser la otra parte de la integral a calcular, es decir que

$$dv = \cos 2x\,dx$$

Para calcular du hay que calcular el diferencial de u

$$u = x$$

$$du = dx$$

Para obtener v hay que calcular la integral de dv

$$dv = \cos 2x\,dx$$

$$v = \int \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

Ahora se utiliza la fórmula de integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\cos 2x\,dx = (x)\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) - \int\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)dx$$

Observe que la integral que resulta en el lado derecho es mas sencilla que la integral dada. Esto nos sugiere que se ha elegido las sustituciones correctas.

Calculando la integral y simplificando

$$\begin{aligned}
\int x\cos 2x\,dx &= (x)\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) - \int\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)dx \\
&= \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\int(\operatorname{sen} 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + c \\
&= \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Integral por partes función con logaritmos

Calcule la integral

$$\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$$

Solución

La integración por partes establece que

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

No podemos elegir $u = \cos x$, pues $dv = \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$, que no se puede integrar fácilmente. La sustitución correcta es

$$\begin{aligned} u &= \ln(\operatorname{sen} x) \\ du &= \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \\ &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

dv tiene que ser la otra parte de la integral, es decir que

$$\begin{aligned} dv &= \cos x\, dx \\ v &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Ahora se utiliza la fórmula de integración por partes

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\begin{aligned} \int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx &= \ln(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - \int (\operatorname{sen} x)\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) dx \\ &= \ln(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - \int (\cos x)\, dx \\ &= \ln(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (\operatorname{sen} x) + c \\ &= \operatorname{sen} x\left(\ln(\operatorname{sen} x) - 1\right) + c \end{aligned}$$

Ejemplo 3: Integral por partes con exponencial natural

Calcule la integral

$$\int (x^2 - 4) e^{-2x}\, dx$$

Solución

La integración por partes establece que

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Haciendo

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 4 & \qquad dv &= e^{-2x}\, dx \\ du &= 2x\, dx & \qquad v &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{aligned}$$

Ahora se utiliza la fórmula de integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int (x^2-4)e^{-2x}\,dx = (x^2-4)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)(2x)dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2-4)e^{-2x} + \int xe^{-2x}\,dx$$

Observe que la integral

$$\int xe^{-2x}\,dx$$

Es más sencilla que la integral inicial, y para calcularla se utiliza nuevamente integración por partes, como se muestra a continuación

Haciendo

$$u = x \qquad dv = e^{-2x}\,dx$$

$$du = dx \qquad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$\int xe^{-2x}\,dx = (x)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

Al sustituir este resultado en la integral anterior se obtiene la respuesta del problema

$$\int (x^2-4)e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}(x^2-4)e^{-2x} + \int xe^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2-4)e^{-2x} + \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2-4)e^{-2x} - -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$$

Ejemplo 4: Integral por partes con trigonométrica inversa

Calcule la integral

$$\int x^2 \tan^{-1} x dx$$

Solución

Esta integral se puede calcular utilizando integración por partes de la siguiente forma

Sea:

$$u = \tan^{-1} x \qquad dv = x^2 dx$$

$$du = \frac{1}{1+x^2}dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3$$

Calculando la integral

$$\int x^2 \tan^{-1} x\,dx = \left(\tan^{-1} x\right)\left(\frac{1}{3}x^3\right) - \int\left(\frac{1}{3}x^3\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

Para calcular la integral de la derecha es necesario efectuar la división ya que el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador. Al efectuar la división de polinomios se tiene

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

Reemplazando la expresión anterior y separando en dos integrales se tiene

$$\begin{aligned}\int x^2 \tan^{-1} x\, dx &= \frac{1}{3}x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{3}\int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{3}\int x\, dx + \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{6}\int \frac{2x}{x^2+1}dx\end{aligned}$$

La última integral se calcula por medio de una sustitución directa $w = x^2+1$, obteniéndose que la solución del problema es

$$\int x^2 \tan^{-1} x\, dx = \frac{1}{3}x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(x^2+1) + c$$

Ejemplo 5: Integral por partes con exponenciales y trigonométricas

Calcule la integral

$$\int e^{-2x} \cos 3x\, dx$$

Solución

Esta integral se puede calcular utilizando integración por partes de la siguiente forma

$$u = e^{-2x} \qquad dv = \cos 3x dx$$
$$du = -2e^{-2x}dx \qquad v = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x$$

Al efectuar las sustituciones se obtiene

$$\begin{aligned}\int e^{-2x} \cos 3x\, dx &= uv - \int v du \\ &= \left(e^{-2x}\right)\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x\right) - \int\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x\right)\left(-2e^{-2x}\right)dx \qquad (1) \\ \int e^{-2x} \cos 3x\, dx &= \frac{1}{3}e^{-2x} \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{3}\int e^{-2x} \operatorname{sen} 3x\, dx\end{aligned}$$

Observe que la integral resultante en el lado derecho es muy similar a la integral inicial,

Al integrar de nuevo por partes se tiene

$$\int e^{-2x} \operatorname{sen} 3x\, dx$$

$$u = e^{-2x} \qquad dv = \operatorname{sen} 3x dx$$
$$du = -2e^{-2x}dx \qquad v = -\frac{1}{3}\cos 3x$$

$$\begin{aligned}\int e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,3x\,dx &= \left(e^{-2x}\right)\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\left(-2e^{-2x}dx\right)\\ &= -\frac{1}{3}e^{-2x}\cos 3x - \frac{2}{3}\int e^{-2x}\cos 3x\,dx\end{aligned} \qquad (2)$$

Observe que ahora en lado derecho se obtiene la integral inicial. Al parecer nos topamos con un proceso que no se termina nunca, sin embargo, al sustituir el resultado de (2) en el resultado de (1) es posible despejar la integral buscada

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,3x + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{-2x}\cos 3x - \frac{2}{3}\int e^{-2x}\cos 3x\,dx\right)$$

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,3x - \frac{2}{9}e^{-2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{-2x}\cos 3x\,dx$$

Como la integral en el lado izquierdo es igual que la integral en el lado derecho podemos pasar ésta última al lado izquierdo y sumarlas y así obtener la respuesta

$$\begin{aligned}\int e^{-2x}\cos 3x\,dx + \frac{4}{9}\int e^{-2x}\cos 3x\,dx &= \frac{1}{3}e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,3x - \frac{2}{9}e^{-2x}\cos 3x\\ \frac{13}{9}\int e^{-2x}\cos 3x\,dx &= \frac{1}{3}e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,3x - \frac{2}{9}e^{-2x}\cos 3x\\ \int e^{-2x}\cos 3x\,dx &= \frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,3x - \frac{2}{9}e^{-2x}\cos 3x\right)\end{aligned}$$

Finalmente

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,dx = \frac{3}{13}e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,3x - \frac{2}{13}e^{-2x}\cos 3x + c$$

O bien la respuesta puede expresarse como

$$\int e^{-2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{13}e^{-2x}\left(3\,\mathrm{sen}\,3x - 2\cos 3x\right) + c$$

Ejercicios sobre integración por partes

En los ejercicios siguientes, calcule la integral utilizando integración por partes. En algunos casos es necesario hacer una sustitución antes de integrar por partes.

1. $\int \ln\left(x^2+1\right)dx$

2. $\int x\ln(x^2+4)dx$

3. $\int x^2\ln(x^2+9)dx$

4. $\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$

5. $\int x\sec^2 x\,dx$

6. $\int 3xe^{2x}\,dx$

7. $\int x^3\,\mathrm{sen}(x^2+4)dx$

8. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-5}}dx$

9. $\int e^x\,\mathrm{sen}\,x\,dx$

10. $\int \mathrm{sen}(\ln x)\,dx$

11. $\int \frac{x^7}{\sqrt[3]{x^4+1}}dx$

12. $\int x^3\ln(3x)\,dx$

13. $\int x^2\cos(2x)\,dx$

14. $\int \tan^{-1}(2x)\,dx$

15. $\int \tan^{-1}\left(\frac{3}{x}\right)dx$

16. $\int x\tan^{-1}(x)\,dx$

17. $\int e^{-2x}\cos(3x)\,dx$

18. $\int \ln^2(6x)\,dx$

19. $\int \ln^2\left(2x^2\right)dx$

20. $\int \frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}dx$

21. $\int \frac{\ln(2x)}{x^{3/4}}dx$

22. $\int x^5 e^{x^3}\,dx$

23. $\int \operatorname{sen}^{-1}(2x)\,dx$

24. $\int x\cos^{-1}(2x)\,dx$

25. $\int e^{\sqrt{t}}\,dt$

26. $\int \cos\left(\sqrt{t}\right)dt$

27. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

28. $\int x^3\cos\left(x^2\right)dx$

29. $\int \frac{\cos^{-1}(\ln x)}{x}\,dx$

30. $\int e^{\operatorname{sen} x}\cos 2x\,dx$

En los ejercicios 31 a 36 evalúe la integral definida

31. $\int_1^e \sqrt{x}\ln(x^2)dx$

32. $\int_1^e \sqrt{x}\ln(x^3)dx$

33. $\int_1^e \frac{\ln(x^2)dx}{\sqrt{x}}$

34. $\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{t^2+4}}\,dt$

35. $\int_1^{\pi/3} \operatorname{sen} x\ln(\cos x)\,dx$

36. $\int_1^3 \frac{x}{e^{2x}}\,dx$