1.5 Aplicaciones de sistemas de ecuaciones lineales

OBJETIVOS

- Plantear problemas cuyo modelo matemático es un sistema de ecuaciones lineales.
- Encontrar la solución de problemas cuyo modelo matemático es un sistema de ecuaciones lineales.

Aplicaciones

En esta sección, se resuelven algunos problemas aplicados, que al ser planteados matemáticamente, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo 1: La mezcla de café

Un cafetalero quiere preparar 100 libras de café en grano mezclando café de tres regiones, Escuintla, Antigua y Cobán. Cada libra de café de Escuintla cuesta Q20, de antigua cuesta Q30 y el de Cobán cuesta Q40 la libra. El productor desea que el costo total del quintal tenga un valor de Q3,200 y que la cantidad de café antigüeño sea el doble que el café de Cobán. Determine cuántas libras de café debe utilizar de cada región para preparar la mezcla requerida.

Solución

Sea: x = Número de libras de café de Escuintla.

y = Número de libras de café de Antigua.

z = Número de libras de café de Cobán.

La suma de las cantidades utilizadas de cada región debe ser igual, es decir que

$$x + y + z = 100$$

Al sumar los costos de las cantidades de café a utilizar según su región, debe ser igual a Q320

$$20x + 30y + 40z = 3200$$

Como la cantidad de café antigüeño es el doble del café de Cobán se tiene que

$$y = 2z$$

$$y - 2z = 0$$

El sistema de ecuaciones a resolver es el siguiente

$$\begin{aligned} x + y + z &= 100 \\ 2x + 3y + 4z &= 320 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones por el método de la matriz inversa se tiene que comenzar calculando la matriz inversa de la matriz de coeficientes. El cálculo se realizará por el método de la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$F1 \times (-2) + F2 \to F2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$F2 \times (-1) + F1 \to F1$

$F2 \times (-1) + F3 \to F3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$F3 \div (-4)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$F3 \times (1) + F1 \to F1$

$F3 \times (-2) + F2 \to F2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

De donde la matriz inversa de la matriz de coeficientes es

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Como la matriz inversa existe, el sistema tiene solución única dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 320 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \left(\frac{5}{2}\right)(100) + \left(-\frac{3}{4}\right)(320) + \left(-\frac{1}{4}\right)(0) = 10$$

$$y = (-1)(100) + \left(\frac{1}{2}\right)(320) + \left(\frac{1}{2}\right)(0) = 60$$

$$z = \left(-\frac{1}{2}\right)(100) + \left(\frac{1}{4}\right)(320) + \left(-\frac{1}{4}\right)(0) = 30$$

Por lo tanto, debe utilizar 10 libras de café de escuintla, 60 libras de café de antigua y 30 libras de café de Cobán.

Ejemplo 2: Venta de enciclopedias

Un vendedor de enciclopedias representa a una empresa que ofrece tres encuadernaciones distintas de sus enciclopedias: normal, de lujo y de piel. Por cada colección que vende su comisión se base en el tipo de encuadernación del producto. Una semana vende tres enciclopedias con encuadernación normal, dos de lujo y cuatro de piel; sus comisiones totalizan Q2,000. La siguiente semana vende una colección normal, una de lujo una de piel y su comisión es de Q600. La tercera semana vende dos enciclopedias con encuadernación normal, una de lujo y tres de piel y su comisión es de Q1,400. Calcule la comisión que recibe el vendedor por cada presentación de la enciclopedia o muestre que la información es insuficiente o incorrecta, planteando el sistema de ecuaciones y utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolverlo.

Solución

Sea: $x =$ Comisión por la venta de una enciclopedia normal.

$y =$ Comisión por la venta de una enciclopedia de lujo.

$z =$ Comisión por la venta de una enciclopedia de piel.

La comisión obtenida en una semana se obtiene multiplicando el número de enciclopedias vendidas de cada tipo por su correspondiente comisión y luego sumando las tres comisiones. Al calcular las comisiones de las 3 semanas se obtiene el sistema

$$3x + 2y + 4z = 2000$$

$$x + y + z = 600$$

$$2x + y + 3z = 1400$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 2000 \\ 1 & 1 & 1 & 600 \\ 2 & 1 & 3 & 1400 \end{bmatrix}$$

Al efectuar operaciones elementales para obtener la matriz reducida se tiene:

Intercambiando la fila 1 con la fila 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 3 & 2 & 4 & 2000 \\ 2 & 1 & 3 & 1400 \end{bmatrix}$$

Multiplicando la fila 1 por -3 y sumándola a la fila 2.

Multiplicando la fila 1 por -2 y sumándola a la fila 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & 1 & 200 \\ 0 & -1 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Multiplicando la fila 2 por -1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & -1 & -200 \\ 0 & -1 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

Multiplicando la fila 2 por -1 y sumándola a la fila 1.

Multiplicando la fila 2 por 1 y sumándola a la fila 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 800 \\ 0 & 1 & -1 & -200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

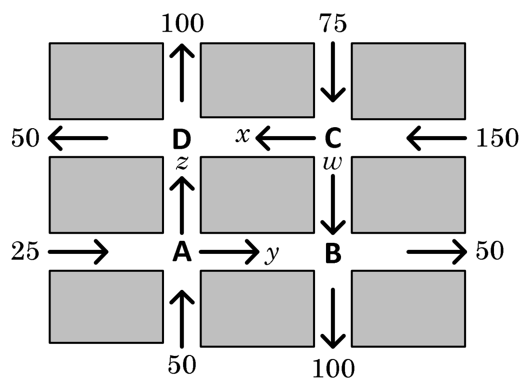
La matriz anterior está escalonada y reducida y el sistema de ecuaciones equivalente que se obtiene de ella es

$$\begin{aligned} x \qquad + 2z &= 800 \\ y \quad - z &= -200 \end{aligned}$$

Como el sistema tiene 2 ecuaciones y 3 incógnitas, tiene infinitas soluciones, por lo que, con la información proporcionada hay muchas comisiones posibles para cada tipo de enciclopedia.

Ejemplo 2: Transito por las calles

En la figura siguiente se muestra un sistema de cuatro calles cuya circulación es en un solo sentido y que conducen al centro de la ciudad. Las cifras de la figura denotan la cantidad promedio de vehículos por hora que avanzan en las direcciones mostradas. Cada hora, un total de 300 vehículos entra en la zona y 300 salen de la misma. Se han coordinado los semáforos en las intersecciones A, B, C y D para evitar congestionamiento y esta sincronización determinará las cantidades de transito x, y, z, w. Determine dichas cantidades.



Solución

El número de vehículos que entran y salen en cada intersección debe ser el mismo, En la intersección A entran 75 vehículos y salen y y z, entonces

$$y + z = 75$$

En la intersección B entran y y w y salen 150 vehículos, es decir

$$y + w = 150$$

En la intersección C entran 225 autos y salen x y w, es decir

$$x + w = 225$$

Finalmente, en la intersección D entran x y z, mientras que salen 150 autos, es decir

$$x + z = 150$$

Como se pude ver el sistema tiene 4 ecuaciones con 4 incógnitas

$$\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & & & = & 150 \\ x & & & & & + & w & = & 225 \\ & & y & + & z & & & = & 75 \\ & & y & & & + & w & = & 150 \end{array}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan, la matriz aumentada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 225 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 150 \end{bmatrix}$$

Efectuando operaciones elementales para obtener la matriz escalonada reducida

$F1 \times (-1) + F2 \rightarrow F2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 75 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 150 \end{bmatrix}$$

$F2 \leftrightarrow F4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 75 \end{bmatrix}$$

$F2 \times (-1) + F3 \rightarrow F3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -75 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 75 \end{bmatrix}$$

$F3 \times (-1) + F1 \rightarrow F1$

$F3 \times (1) + F4 \rightarrow F4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 225 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la matriz escalonada reducida se obtiene que el sistema equivalente de ecuaciones es

$$\begin{array}{ccccccccc} x & & & & & + & w & = & 225 \\ & & y & & & + & w & = & 150 \\ & & & & z & - & w & = & -75 \end{array}$$

Como el sistema es de 3 ecuaciones y 4 incógnitas, tiene infinitas soluciones, por lo que, con la información proporcionada hay muchas formar en las que puede fluir el tránsito por las intersecciones.

Ejercicios sobre aplicaciones de los sistemas de ecuaciones

En los ejercicios siguientes, resuelva el problema propuesto, utilizando el método que considere conveniente

1. Se tienen tres tipos de fertilizante para grama, A con 30%, B con 20% y C con 15% de contenido de nitrógeno. Se necesita obtener 600 libras de una meza con 25% de nitrógeno. La mezcla debe contener 100 libras más de C que de B. ¿Cuánto de cada tipo se debe mezclar?

2. Un cajero de banco examina la cantidad de dinero en su caja y obtiene la siguiente información. Hay un total de Q. 1,530.00 en billetes de Q5, Q10 y Q20. El número total de billetes es de 200. El número de billetes de Q10 más cinco veces número de billetes de Q20 es igual al número de billetes de Q5. Encuentre el número de billetes de cada denominación o muestre que la información es incorrecta o insuficiente.

3. Un agricultor que cultiva trigo, cebada y avena debe enviar a un comprador 100 pacas de cereal en total. Si la paca de cebada cuesta Q40.00, la de trigo Q20.00 y la de avena Q5.00. ¿Cuántas pacas de cada cereal debe enviar, si desea recibir como pago Q1000.00?

4. Una papelería vende dos tipos de cuaderno, el primero tiene un precio de Q5.00 y el segundo de Q7.00. La compañía recibe un pedido por 500 de cuadernos junto con un cheque de Q2860.00. Si el pedido no especifica el número de cada tipo de cuaderno, ¿Qué cantidad de cada uno debe despachar?

5. Plantee un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas para resolver el siguiente problema, luego resuélvalo. Un químico tiene tres recipientes de solución de ácido de distintas concentraciones. El primero tiene 10% de ácido; el segundo, 20% y el tercero 40% ¿Qué cantidad de cada solución debe mezclar para obtener 100 ml de ácido con 18% de concentración, si la solución al 40% debe ser la cuarta parte de la solución al 10%?

6. El encargado de una planta de envasado de botellas de refresco quiere saber cuántos envases de 1, 2 y 3 litros debe comprar, si necesita envasar 1000 litros de refresco, pero debe usar solamente 500 envases y la cantidad de refrescos de 1 litros debe ser igual a la cantidad de refrescos de 3 litros. Plantee un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas luego resuélvalo para determinar el número de botellas de cada tamaño que se deben comprar o demuestre que la información es incorrecta.

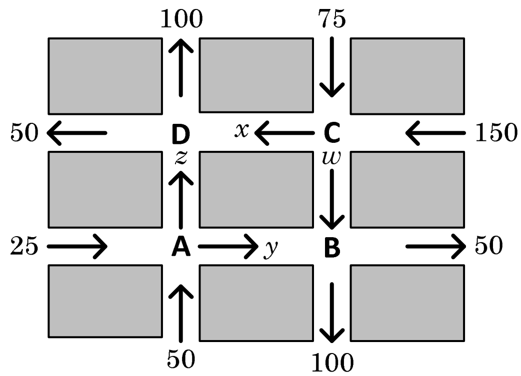
7. Si $x^4 + ax^3 + bx^2 + 31\,x + c = 0$ tiene raíces $x = 1,\ -2\ \ y\ \ 3$ determine los valores de $a, b\ y\ c$ y de la cuarta raíz.

8. Un teatro tiene 400 asientos, repartidas en asientos de orquesta, principales y de balcón. Los asientos de la zona de orquesta cuestan Q60, los de la zona principal Q45 y los del balcón Q30. Si se venden todas las entradas, el ingreso del teatro es de Q 18,000. Si se vende la quinta parte de los salones de orquesta, la tercera parte de los salones principales y la mitad de los salones de balcón, el ingreso es de Q6,000. Encuentre los asientos de cada zona o muestre que la información es insuficiente o incorrecta ya que es inconsistente.

9. Resuelva el siguiente problema utilizando el método de eliminación Gaussiana

Una compañía tiene tres máquinas A, B y C; cada una de las cuales puede producir cierta pieza. Sin embargo, debido a la falta de trabajadores calificados, solo pueden trabajar dos máquinas al mismo tiempo. Si las máquinas A y B trabajan juntas durante 6 horas producen 4,500 piezas. Si las máquinas A y C trabajan juntas durante 8 horas se producen 3,600 piezas y si las máquinas B y C trabajan juntas durante 7 horas producen 4,900 piezas. Calcule cuantas piezas produce cada máquina por hora.

10. En la figura siguiente se muestra un sistema de cuatro calles cuya circulación es en un solo sentido y que conducen al centro de la ciudad. Las cifras de la figura denotan la cantidad promedio de vehículos por hora que avanzan en las direcciones mostradas. Cada hora, un total de 300 vehículos entra en la zona y 300 salen de la misma. Se han coordinado los semáforos en las intersecciones A, B, C y D para evitar congestionamiento y esta sincronización determinará las cantidades de tránsito y, z, x, w. Determine dichas cantidades.



11. Utilizando el método de la matriz inversa resuelva el siguiente problema

Una florista ofrece tres tamaños de arreglos florales que contienen rosas, margaritas y crisantemos. Cada arreglo pequeño contiene una rosa, tres margaritas y tres crisantemos. Cada arreglo mediano contiene dos rosas, cuatro margaritas y seis crisantemos. Cada arreglo grande contiene cuatro rosas, ocho margaritas y seis crisantemos. Un día la florista advierte que ha empleado un total de 48 rosas, 100 margaritas y 96 crisantemos para preparar los arreglos de ese día. ¿Cuántos arreglos de cada tipo habrá vendido?

12. Una compañía de seguros para la salud se anuncia en televisión, en radio y en el diario local. El departamento de mercadotecnia tiene un presupuesto de publicidad de Q36,000 al mes. Un anuncio en televisión cuesta Q1,000, uno en radio Q200 y uno en el periódico Q600. El departamento desea publicar 60 anuncios por mes. El número de anuncios por televisión es igual al número de anuncios de radio. Encuentre el número de anuncios en cada medio o muestre que la información es insuficiente.

13. A una persona el doctor le prescribió tomar 10 unidades de vitamina A, 9 unidades de vitamina D y 19 unidades de vitamina E diariamente. La persona puede elegir entre tres marcas de píldoras vitamínicas. La marca Buena tiene 2 unidades de vitamina A, 3 de vitamina D y 5 de vitamina E. La marca Rebuena tiene 1,3 y 4 unidades, respectivamente; y la marca Super tiene 1 unidad de vitamina A, ninguna de vitamina D y 1 unidad de vitamina E.

(a) Encuentre todas las combinaciones posibles de píldoras que proporcionan de manera exacta las cantidades requeridas.

(b) Si la marca Buena cuesta 1 centavo cada píldora, la marca Rebuena cuesta 6 centavos cada píldora y la marca Super cuesta 3 centavos la píldora. ¿Existe alguna combinación de la respuesta (a) que cueste exactamente 15 centavos?

(c) ¿Cuál es la combinación menos cara de la parte (a), y la más cara?